UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Departamento de Matemática

TOPOLOGIA GERAL

Notas de Aula - $n^{o.}$ 5

Ermínia de Lourdes Campello Fanti
Sebastião Antonio Izar

São José do Rio Preto
2^a Edição, 2020

Conteúdo

"Uma comunidade se define em função de um amor comum."

(Santo Agostinho)

"Qualquer inferência se baseia em hipóteses. Tais hipóteses ou são evidentes em si e dispensam prova ou somente podem ser sustentadas quando baseadas em outros teoremas. Já que não é possível proceder deste modo AD INFINITUM, *toda ciência dedutiva, a geometria em particular, terá de apoiar-se num certo número de axiomas não demonstráveis. Por isto todos os livros didáticos de geometria iniciam com a numeração desses axiomas. "*

(Henri Poincaré - Ciência e Hipótese)

Introdução

Este texto tem por objetivo, numa primeira aproximação, introduzir as noções fundamentais da Topologia Geral, as técnicas utilizadas em seu desenvolvimento e certos tipos de questões de seu interesse.

Seu fim é duplo: o de servir como material auxiliar nos cursos de Topologia do bacharelado em Matemática e no de pós-graduação em Matemática em nível de mestrado, do Departamento de Matemática do IBILCE-UNESP. Para o curso de pós-graduação propomos o texto integral, eventualmente com algum tópico adicional (por exemplo grupos topológicos, homotopia e revestimentos, grupo fundamental, entre outros) e no curso de graduação algumas omissões podem ser feitas, que ficam a critério do professor. Não é feito aqui um estudo específico dos Espaços Métricos (que são exemplos de espaços topológicos). Uma referência básica para o estudo de Espaços Métricos é o livro de Domingues [4]. Uma outra referência interessante é Lima [15]. Contudo, Espaços Métricos não se constitui num pré-requisito para o que propomos. O presente texto está edificado na Teoria dos Conjuntos, de modo que alguma familiaridade com a Teoria dos Conjuntos se faz necessária para que se consiga algum resultado aqui.

O texto contém um desenvolvimento detalhado dos tópicos, muitos exemplos e contraexemplos e um grande número de exercícios. Os exemplos/contraexemplos devem ser aprendidos, pois com eles é que a intuição é adquirida e os exercícios fornecem o treinamento adequado ao estudante, além de em alguns casos serem utilizados para introduzir algum assunto que não foi por nós abordado.

O conteúdo do texto é o seguinte, no Capítulo 1: *Elementos da Teoria dos Conjuntos*, se faz um apanhado de toda a Teoria dos Conjuntos que se utiliza neste trabalho, é um resumo dos pré-requisitos. A proposta é que esse capítulo não seja desenvolvido num curso de topologia, a menos de seu final que trata dos produtos infinitos, do axioma da escolha e do Lema de Zorn, caso seja necessário. No Capítulo 2: *Espaços Topológicos*, tem o seu início com a noção de topologia sobre um conjunto e espaços topológicos, inclue exemplos de espaços topológicos, os conceitos de interior, fecho, fronteira, as noções de base e sub-base para uma topologia, os axiomas de enumerabilidade, espaços Separável e de Lindelof, e propriedades hereditária e transferível para o produto. No Capítulo 3: *Continuidade*, se estuda as aplicações contínuas, aplicações abertas, aplicações fechadas, homeomorfismos. Também, a topologia induzida por uma família de funções, a topologia coinduzida por uma função e a topologia quociente são consideradas. No Capítulo 4: *Compacidade*, são estudados os vários tipos de compacidade: espaços compactos, pré-compactos, contavelmente compactos, sequencialmente compactos, localmente compactos. A equivalência das várias noções de compacidade para os espaços métricos e o Teorema de Tychonoff são demonstrados. Também, é construído o compactificado de Alexandroff de um espaço que é de Hausdorff e localmente compacto. No Capítulo 5: *Conexão*, são vistas as várias formas de conexão para espaços topológicos: espaços conexos, localmente conexos, conexos por caminhos. No Capítulo 6: *Axiomas de Separação*, são introduzidos os axiomas de separação, divididos em três grupos: separação de dois pontos, separação de ponto e conjunto fechado e separação de dois conjuntos fechados. A terminologia adotada é a de Alexandroff e Hopf. Neste capítulo se demonstra o Lema de Urysohn, aborda a questão de metrizabilidade: o Teorema de Metrização de Urysohn que dá uma condição suficiente para a metrizabilidade de um espaço topológico, e ainda, com o Teorema da Extensão de Tietze, o problema da extensão de funções contínuas. Uma noção dos Teoremas de Metrização de Nagata/Srminov, que dão condições necessárias e suficientes para a metrização, é também apresentada. O Capítulo 7: *Espaços Métricos Completos* é dedicado ao estudo dos espaços métricos em que toda sequência de Cauchy é convergente. O Teorema de Baire é demonstrado e o completamento de um espaço métrico é construído: tal construção oferece, como caso particular, uma contrução do conjunto dos número reais a partir do conjunto dos números racionais. Por fim, no Capítulo 8: *Espaços de Funções*, abordamos as topologias da convergência pontual ou simples, da convergência uniforme, da convergência uniforme nas partes compactas e a topologia compacto-aberta para espaços de funções. Caracterizamos os conjuntos compactos no espaço de funções $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ e mais geralmente em $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^n)$, para X um espaço topológico compacto (Teorema de Arzela-Ascoli e Teorema de Ascoli versão clássica). Por fim comparamos, quando possível as topologias para espaços de funções, acima mencionadas.

A primeira edição desse trabalho foi feita em 1998, como “Notas de Aula N^o 5” do Departamento de Matemática do IBILCE/UNESP (Fanti e Izar, 1998). Nessa ocasião contamos com a colaboração de várias pessoas, as quais agradecemos aqui: à Mitico Hayashi pela digitação dos primeiros capítulos, ao Prof^o Dr. Adalberto Spezamiglio pela grande ajuda com os editores de texto e a Alex Antonio dos Santos e Maurício Borim, do Setor de Gráfica do IBILCE pela atenção que nos dispensaram. Em 2007, por solicitação dos autores, as notas foram redigitadas (usando o WinEdt) por uma aluna do 4^o ano do bacharelado em Matemática do IBILCE - UNESP, Fernanda de Andrade Pereira, que também expressamos nossos agradecimentos.

Nesta segunda edição foram feitas algumas correções bem como algumas adequações/ complementações realizadas durante o primeiro semestre de 2020 quando a Profa. Ermínia de L. C. Fanti teve a oportunidade de ministrar a disciplina Topologia II, de forma remota, para os alunos de Bacharelado em Matemática do IBILCE/UNESP.

São José do Rio Preto, novembro de 2020.

Ermínia de Lourdes Campello Fanti
Sebastião Antonio Izar

Generalidades sobre Topologia

A *Topologia Geral* compreende tudo o que se pode dizer de um modo geral sobre os conceitos relacionados com proximidade, vizinhança e convergência.

O nome *Topologia* provém do grego: *topos* significa lugar e *logos* significa estudo, de modo que Topologia é o estudo do lugar. *Analisis situs* é o nome adotado para esta disciplina em latim.

O surgimento de um novo conceito matemático é quase sempre fonte de um longo e complexo percurso. As noções de limite e continuidade remontam à antiguidade, de modo que não se pode fazer uma história completa sem estudar sistematicamente deste ponto de vista e não somente os matemáticos, mas também os filósofos gregos (vide Bourbaki [1]).

Contudo a reunião destes temas no contexto da disciplina matemática "Topologia", ou o surgimento da Topologia como uma disciplina matemática onde os conceitos acima encontram o seu lugar, é relativamente recente.

George Friederich Bernard Riemann (1826-1866) é considerado o criador da Topologia, por ser o primeiro a considerar a noção intrínseca (abstrata, fora do espaço euclidiano) de espaço topológico, estabelecendo uma teoria autônoma destes espaços. Definiu invariantes topológicos (os número de Betti) que mais tarde teriam um grande papel no desenvolvimento da Topologia e fez as primeiras aplicações à Análise Matemática com as integrais abelianas. Isto ocorreu por volta de 1851.

O primeiro livro de Topologia foi escrito por um astrônomo alemão *Johann Benedict Listing* (1808-1882), publicado em 1847 por sugestão de *Karl Friederich Gauss* (1777-1855). O livro continha resultados muito curiosos de pesquisa sobre as superfícies de "um lado só" (a faixa de Möbius, o espaço projetivo, a garrafa de Klein são superfícies de um lado só). Os resultados de Listing também foram obtidos simultaneamente por *August Ferdinand Möbius* (1790-1863).

A Topologia pode ser definida como o estudo de certas transformações (aplicações) chamadas homeomorfismos que são as transformação bijetoras, contínuas e com inversa contínua entre dois espaços topológicos. Não se permite que pontos distintos sejam identificados e também não se permite cortes. Espaços homeomorfos podem ser deformados continuamente um no outro.

A Topologia estuda as propriedades dos espaços topológicos que ficam invariantes, isto é, são preservadas por estas transformações e seu objetivo principal é encontrar invariantes em quantidade suficiente para que se possa decidir se dois espaços topológicos dados "a priori" possam ou não ser transformados um no outro do modo permitido. Este objetivo é análogo ao de qualquer outro ramo da geometria.

Em seu "*Programa Erlanger*", *Felix Klein* (1849-1925) observou que os diferentes ramos da geometria se diferenciavam pelas espécies de transformações bijetoras que adotavam: *movimentos rígidos* na Geometria Euclidiana, *colineações* na Geometria Projetiva, etc...

Na formulação geral de *Klein*, uma geometria é um estudo da forma:

Dados um conjunto X, um subconjunto X_0 e um subgrupo G do grupo de todas as bijeções de X em X, achar um conjunto completo S *de propriedades* (*G-invariantes*) *tais que:*

(i) *X_0 possui cada propriedade de X e também $g(X_0)$, para cada $g \in G$;*

(ii) *Se X_1 é qualquer subconjunto de X possuindo todas as propriedades em* S*, então existe $g \in G$ tal que $g(X_1) = X_0$.*

Isto define a geometria com relação à G de X_0 em X (vide Griffths e Hilton [7], Cap. 17 - §11 e Cap. 25).

Até agora se considerou as propriedades das figuras que se estuda em Topologia. Nada se falou sobre os tipos de figuras estudadas em Topologia. Pode-se considerar, a priori, como uma figura, um conjunto qualquer de pontos. A topologia obtida desta forma é a *Topologia Conjuntista* ou a *Topologia Geral*, que é baseada na Teoria dos Conjuntos introduzida por *Georg Cantor* (1845-1918) por volta de 1879. Como as figuras estudadas na Topologia Conjuntista são conjuntos de pontos extremamente gerais, é natural que os resultados obtidos neste contexto escapem à intuição e, muitas vezes, entram em contradição com ela. Isto pode nos proporcionar uma oportunidade de corrigir nossa intuição, que muitas vezes falha e também nos apresentar fatos patológicos inerentes à nossa área. Apesar de sua extrema generalidade, a topologia conjuntista encontra numerosas aplicações em Análise Matemática. *Cantor* definiu no espaço euclidiano n-dimensional os conceitos fundamentais da Topologia e obteve resultados essenciais sobre a estrutura topológica da reta e do plano.

Em 1914, *Felix Hausdorff* em seu livro "Grundzüge der Mengenlehre" dedicado à Georg Cantor, começa a Topologia Geral tal qual a entendemos hoje. No Capítulo 7 deste livro são definidos os conceitos mais importantes da topologia dos conjuntos de pontos.

Capítulo 1

Elementos da Teoria dos Conjuntos

"Nenhum outro problema impregnou tão profundamente a alma do homem como o infinito. Nenhuma outra idéia atuou com tanto estímulo e fertilidade sobre a mente como o infinito. Nenhum outro conceito necessita de esclarecimento como o infinito."
(David Hilbert - Sobre o Infinito - 1926)

"Se se deseja um slogan que expresse o cerne da Matemática, pode-se dizer que ela é a ciência do infinito."
(Hermann Weyl)

1.1 Introdução

As noções de conjunto, elemento e relação de pertinência não são definidas. Num desenvolvimento axiomático da teoria, estas noções são consideradas primitivas e os axiomas têm a finalidade de estabelecer propriedades cruciais destes elementos que não são definidos.

Neste capítulo faremos um apanhado, de um ponto de vista bastante informal, da parte elementar da Teoria dos Conjuntos que é da maior importância para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes. Para maiores detalhes sugerimos os livros: Halmos [8], Izar e Tadini [10], Lipschultz [16], Sims [23] e Spanier [26], da bibliografia apresentada no final do texto.

1.2 Conjuntos - Pertinência e Inclusão

Um *conjunto* é constituído de *elementos* e determinado por eles. Dois conjuntos *são iguais* se eles têm os mesmos elementos. Os conjuntos são denotados, de um modo geral, por letras maiúsculas e os elementos por letras minúsculas de algum alfabeto.

Se X é um conjunto e x um elemento, escrevemos $x \in X$ (x *pertence* a X) para indicar que x é um elemento de X, e, $x \notin X$, caso contrário.

Definição 1.2.1. *Diz-se que um conjunto X é **subconjunto** de um conjunto Y ou que X está **contido***

em Y, e denotamos $X \subseteq Y$ (ou $X \subset Y$), se todo elemento de X é também elemento de Y, ou seja,

$$X \subseteq Y \Leftrightarrow (\forall\, x,\; x \in X \Rightarrow x \in Y).$$

Quando $X \subseteq Y$ mas $X \neq Y$, ou seja, existe $y \in Y$ tal que $y \notin X$ dizemos que X está ***contido estritamente*** *em Y. Neste caso, se quer destacar que a inclusão é estrita, a notação $X \subset Y$ é mais indicada. Usa-se também a notação $X \subsetneq Y$.*

Um conjunto fica determinado pelos seus elementos. Existem duas maneiras de se descrever um conjunto: a primeira é dar a lista completa de seus elementos, e na segunda, um conjunto é constituído pelos elementos de um dado conjunto que satisfazem a uma dada propriedade. O princípio acima é o seguinte:

Dado um conjunto X e uma propriedade P, existe um único subconjunto de X cujos elementos satisfazem a propriedade P.

***Notações*:**

(i) Lista dos elementos entre chaves: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$.

(ii) $A = \{x \in X : x \text{ satisfaz } P\} = \{x \in X : P(x)\}$.

P representa uma propriedade que deve ser ou não satisfeita pelos elementos de X e deve ser verdadeira para todos os elementos de A.

***Propriedades da Inclusão*:**

A relação de inclusão entre conjuntos é:

(i) Reflexiva, isto é, $\forall\, A,\; A \subseteq A$.

(ii) Antissimétrica, $A \subseteq B$ e $B \subseteq A \Rightarrow A = B,\; \forall\, A, B$.

(iii) Transitiva, $A \subseteq B$ e $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$, $\forall A, B, C$.

Neste ponto observamos que somente uma propriedade não determina um conjunto, é necessário um conjunto (universo) que contém os elementos que a propriedade deve selecionar. A ilustração abaixo mostra isso claramente.

Seja $\mathcal{A} = \{A : A \notin A\}$. $\mathcal{A}$ é o conjunto de todos os conjuntos que não se tem como elemento. $\mathcal{A}$ é um conjunto, assim dado um objeto qualquer, deve ser possível decidir se este objeto é ou não elemento de $\mathcal{A}$. Seja dado o próprio $\mathcal{A}$. Então, se $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$, vem que $\mathcal{A} \notin \mathcal{A}$ pois $\mathcal{A}$ satisfaz a propriedade que define $\mathcal{A}$, o que é um absurdo, e se $\mathcal{A} \notin \mathcal{A}$, então $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$, pois $\mathcal{A}$ não satisfaz a propriedade que define $\mathcal{A}$ e tem-se, novamente, uma contradição. A conclusão é que $\mathcal{A}$ não existe.

O argumento acima é conhecido como *paradoxo de Russel*. Paradoxo porque no início da Teoria dos Conjuntos adotava-se o princípio de que toda propriedade determinava um conjunto.

1.2.1 Alguns Conjuntos Especiais

Conjunto Vazio: O *conjunto vazio* , denotado por $\emptyset$, é o conjunto que não possui elementos. Se A é um conjunto, o conjunto vazio é definido por

$$\emptyset = \{x \in A : x \neq x\}.$$

O conjunto vazio é definido como o conjunto dos elementos que deixam de satisfazer uma propriedade que é satisfeita por todos os elementos do universo. Assim, como é usual, para demonstrar que o *conjunto vazio tem uma determinada propriedade*, demonstra-se que *ele não pode deixar de tê-la*. O conjunto vazio é considerado um conjunto finito (com zero elementos).

Conjunto das Partes: Se X é um conjunto, denotamos por 2^X ou $\mathcal{P}(X)$ o conjunto de todos os subconjuntos de X. Tal conjunto é denominado *conjunto das partes de* X.

$$\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}.$$

Conjuntos Numéricos

- Conjunto dos *números naturais*: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.
- Conjunto dos *números inteiros*: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- Conjunto dos *números racionais*: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p,\ q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$.
- Conjunto dos *números reais*: $\mathbb{R}$.
- Conjunto dos *números complexos*: $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$, onde i é tal que $i^2 = -1$.

Tem-se $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, e as inclusões são estritas, pois, por exemplo, $-1 \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ e $4i \in \mathbb{C}$, enquanto $-1 \notin \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ e $4i \notin \mathbb{R}$.

A definição de número real é extremamente complicada quando comparada a de número racional. Ela pode ser dada através dos *Cortes de Dedekind* de números racionais ou através de classes de equivalência de *sequências de Cauchy* de números racionais. No Capítulo 7 (*Espaços Métricos Completos*) apresentamos a construção dos números reais utilizando as sequências de Cauchy de números racionais, de fato isso será um caso especial (considerando $M = \mathbb{Q}$) da construção do completamento de um espaço métrico M qualquer (Proposição 7.4.7).

1.2.2 Exercícios

1) Mostre que, se X é um conjunto então $\emptyset \subseteq X$.

2) Demonstre as propriedades de inclusão de conjuntos, isto é, que a inclusão de conjuntos satisfaz as propriedades reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

3) Sejam P e Q duas propriedades. Verifique que:

a) Se $\{x \in X : P(x)\} \subseteq \{x \in X : Q(x)\}$ então a propriedade P implica a propriedade Q.

b) Se $\{x \in X : P(x)\} = \{x \in X : Q(x)\}$ então a propriedade P é equivalente a propriedade Q.

4) Calcular $\mathcal{P}(X)$ se X é:

a) $\emptyset$.

b) $\{\emptyset\}$.

c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

d) $\{1, 2, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$.

5) Prove que $X \subseteq Y$ se, e somente se, $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(Y)$.

6) Verifique que se X tem n elementos, então $\mathcal{P}(X)$ tem 2^n elementos.

1.3 Operações com Conjuntos

Todos os conjuntos considerados a partir daqui serão subconjuntos de um conjunto fixado U. Definimos, a seguir, as operações envolvendo os conjuntos e enunciamos suas principais propriedades. As demonstrações destas propriedades são deixadas como exercícios para o leitor.

Reunião: Se A e B são subconjuntos de U, a *reunião* de A e B é o conjunto

$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Interseção: Se A e B são subconjuntos de U, a *interseção* de A e B é o conjunto

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Diferença: A *diferença* entre os conjuntos A e B, nesta ordem, é o conjunto

$$A - B = \{x \in U : x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Diferença Simétrica: A *diferença simétrica* entre dois conjuntos A e B é definida por

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

Complementação: Se A é um conjunto, o *complementar* de A *(*em U*)* é

$$A^c = U - A = \{x \in U : x \notin A\}.$$

Observação 1.3.1. *Por indução define-se a reunião e a interseção de uma coleção finita de conjuntos:*

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cup A_n,$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = (A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \cap A_n.$$

Propriedades das Operações:

(i) $A - A = \emptyset, \quad A - \emptyset = A, \quad \emptyset - A = \emptyset;$

(ii) $A \cup A = A, \quad A \cap A = A;$

(iii) $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A;$

(iv) $A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; A \cup B = B \;\Leftrightarrow\; A \cap B = A;$

(v) $A \subseteq A \cup B, \quad A \cap B \subseteq A;$

(vi) $A \subseteq C$ e $B \subseteq C \;\Leftrightarrow\; A \cup B \subseteq C, \quad C \subseteq A$ e $C \subseteq B \;\Leftrightarrow\; C \subseteq A \cap B;$

(vii) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$

(viii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cap C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$

(ix) $(A^c)^c = A, \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c;$

(x) $A \subseteq Y \;\Leftrightarrow\; A^c \supseteq B^c,\; A \cap B = \emptyset \;\Leftrightarrow\; A \subseteq B^c \;\Leftrightarrow\; B \subseteq A^c,\; A \cup B = U \;\Leftrightarrow B^c \subseteq A \;\Leftrightarrow\; A^c \subseteq B.$

1.4 Produto Cartesiano - Relação Binária

O ***produto cartesiano*** $A \times B$ dos conjuntos A e B é o conjunto dos pares ordenados (a,b), onde $a \in A$ e $b \in B$. O par ordenado (a,b) é conjunto dos elementos a e b dispostos na ordem: primeiro a, depois b; $(a,b) = (c,d)$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$. Assim

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Propriedades:

(i) $A \times B = \emptyset$ se, e somente se, $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$;

(ii) Se $A \times B \neq \emptyset$, então $A \times B \subseteq X \times Y$ se, e somente se, $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$;

(iii) $(A \times B) \cup (C \times B) = (A \cup C) \times B$;

(iv) $(A \times B) \cap (C \times B) = (A \cap C) \times B$.

A noção de produto cartesiano, definida para dois conjuntos estende-se de maneira natural a qualquer número finito $n > 2$ de conjuntos. Assim, o produto cartesiano de n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ representado por $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ ou $\prod_{i=1}^{n} A_i$ consiste de todas as n-uplas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ordenadas, onde $x_i \in A_i$, para cada i. No caso particular em que $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$, o produto cartesiano é representado por A^n. Na Seção 1.9 apresentamos a noção geral de produto cartesiano de uma família de conjuntos.

Observação 1.4.1. *i) Definindo-se $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$ vem que $(a,b) = (c,d)$ se, e somente se, $a = c$ e $(b = d)$.*

ii) A definição de par ordenado acima foi dada pelo matemático polonês K. Kuratowski. A vantagem da definição de Kuratowski é que ela introduz a noção de par ordenado não como uma noção primitiva, mas define-a em função de objetos já considerados.

Uma ***relação binária*** entre dois conjuntos é um subconjunto de seu produto cartesiano, isto é, $\mathcal{R}$ é uma relação entre A e B se, e somente se, $\mathcal{R} \subseteq A \times B$. Escrevemos $x\,\mathcal{R}y$ para indicar que $(x,y) \in \mathcal{R}$. Se $A = B$ dizemos que $\mathcal{R}$ é uma relação sobre A.

Exemplo 1.4.2. 1) $\emptyset$ é uma *relação entre A e B (a relação vazia).*

2) *$A \times B$ também é uma relação entre A e B.*

3) *$\triangle = \{(x,y) \in A \times A : x = y\}$ é a relação de igualdade para elementos de A. Esta relação é denominada diagonal de $A \times A$.*

4) *Dado um conjunto X, $\mathcal{R} = \{(x,A) \in X \times \mathcal{P}(X)\}$ é a relação de pertinência entre elementos de X e subconjuntos de X.*

5) *$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} :\ x - y$ é múltiplo de $m\}$ é a relação de congruência módulo m sobre o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros.*

***Propriedades*:**

As propriedades mais consideradas de uma relação $\mathcal{R}$ sobre um conjunto A são as seguintes:

(i) Reflexiva, $\forall\, x \in A,\ x\,\mathcal{R}x$;

(ii) Simétrica, $\forall\, x,y \in A,\ x\,\mathcal{R}y \Rightarrow y\,\mathcal{R}x$;

(iii) Transitiva, $\forall\, x,y,z \in A,\ x\,\mathcal{R}y$ e $y\,\mathcal{R}z \Rightarrow x\,\mathcal{R}z$;

(iv) Antissimétrica, $\forall\, x,y \in A,\ x\,\mathcal{R}y$ e $y\,\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$.

Uma relação sobre A que satisfaz os ítens (i), (ii) e (iii) acima é denominada ***relação de equivalência***, e uma relação que satisfaz (i), (ii) e (iv) é denominada uma ***relação de ordem parcial*** sobre A. Um conjunto A munido de uma ordem parcial é dito ***parcialmente ordenado***. Quando $\mathcal{R}$ for uma relação de ordem parcial sobre A e quaisquer dois elementos $x, y \in A$ estão relacionados por $\mathcal{R}$ (isto é, $x\ \mathcal{R} y$ ou $y\ \mathcal{R} x$), dizemos que a relação de ordem é *total* e que o conjunto A é ***totalmente ordenado*** por $\mathcal{R}$.

Exemplo 1.4.3. 1) *A relação de congruência módulo m é uma relação de equivalência sobre o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros.*

2) *A relação menor ou igual é um relação de ordem total sobre o conjunto dos números inteiros.*

3) *Dada uma coleção qualquer de conjuntos, a relação de inclusão (de conjuntos) é uma relação de ordem parcial sobre esta coleção.*

1.5 Aplicações ou Funções

Definição 1.5.1. *Uma relação f de A em B é uma **aplicação**, ou **função**, ou ainda, uma **transformação** se:*

(1) *para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que xfy;*

(2) *para todos $x, y, z \in A$, se xfy e xfz então $y = z$.*

O termo *função* é, reservado, às vezes, apenas para o caso em que B é um conjunto numérico. O conjunto A é o ***domínio*** da função f e B é o ***contradomínio*** de f. O único y associado a x pela aplicação f é a imagem de x por f e é denotado por $f(x)$.

A condição (1) da definição acima diz que o domínio da relação é o conjunto A e condição (2) exige que o elemento associado a cada $x \in A$ por f é único. Uma aplicação f é usualmente representada assim:

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto y = f(x). \end{aligned}$$

O conjunto

$$Im(f) = \{y \in B : \exists\, x \in A \text{ com } y = f(x)\}$$

é o ***conjunto imagem*** da aplicação f.

Exemplo 1.5.2. 1) *Se X é um conjunto, a correspondência $A \mapsto X - A$ (complementar de A em X) define uma aplicação de $\mathcal{P}(X)$ em $\mathcal{P}(X)$.*

2) *São aplicações*

$$p_1 : \begin{array}{ccc} X \times Y & \to & X \\ (x,y) & \mapsto & x \end{array} \qquad e \qquad p_2 : \begin{array}{ccc} X \times Y & \to & Y \\ (x,y) & \mapsto & y \end{array}.$$

Elas são denominadas ***projeções*** *do produto nas primeira e segunda coordenadas, respectivamente.*

Duas aplicações f e g são *iguais* se, e somente se, têm o mesmo domínio, o mesmo contradomínio e para cada x no domínio de f e g, tem-se $f(x) = g(x)$.

Restrição de Aplicação: Sejam $f : A \to B$ uma aplicação e $C \subseteq A$. A aplicação

$$f|_C : \begin{array}{ccc} C & \to & B \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

é a *restrição* de f ao subconjunto C de A.

Extensão de Aplicação**:** Sejam A e B conjuntos, $C \subseteq A$, e $f : A \to B$ e $g : C \to B$ aplicações. Se $g = f|_C$, então dizemos que f é uma *extensão* de g.

Gráfico de uma Aplicação**:** Seja $f : A \to B$ uma aplicação. O *gráfico* de f é o conjunto

$$Gr(f) = \{(x,y) \in A \times B : y = f(x)\}$$

Observação 1.5.3. *Apresentamos, neste ponto, uma formulação do Axioma da Escolha* (*existem outras formulações, vide Seção* 1.9). *O Axioma da Escolha é um princípio da Teoria dos Conjuntos que sob determinadas condições garante a existência de uma aplicação/função escolha:*

Dada uma aplicação $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ tal que $F(x) \neq \emptyset$, para todo $x \in X$, existe uma aplicação $f : X \to Y$ tal que $f(x) \in F(x)$, para todo $x \in X$.

O Axioma da Escolha garante a existência de uma aplicação sob as condições mais gerais possíveis. Em alguns casos uma função escolha pode ser efetivamente definida. O axioma se faz necessário quando não existe um critério para "escolher" um elemento $f(x)$ em cada subconjunto não vazio $F(x)$ de Y.

Exemplo 1.5.4. *Dada uma aplicação $F : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tal que $F(n) \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$, o Axioma da Escolha garante a existência de uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) \in F(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Exemplo 1.5.5. *Dada uma aplicação $F : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, uma função escolha pode ser definida assim: dê a $\mathbb{Z}$ a ordem $0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, \ldots$ Relativamente a esta ordem, todo subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}$ tem primeiro elemento. Defina $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(n) =$ primeiro elemento de $F(n)$. Neste caso não é necessário utilizar o Axioma da Escolha.*

Imagem Direta: Sejam $f : X \to Y$ uma aplicação e $A \subseteq X$. O conjunto

$$f(A) = \{y \in Y : y = f(x) \text{ para algum } x \in A\}$$

é a *imagem direta* de A por f. Notemos que se $A = X$, então $f(X) = Im(f)$.

Propriedades

(i) $f(A) = p_2(Gr(f) \cap (A \times Y))$;

(ii) $A \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; f(A) \neq \emptyset$;

(iii) $f(\{x\}) = \{f(x)\}$;

(iv) $A \subseteq B \;\Rightarrow\; f(A) \subseteq f(B)$;

(v) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

(vi) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Imagem Inversa: Sejam $f : X \to Y$ uma aplicação e $B \subseteq Y$. O conjunto

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

é a *imagem inversa* ou *pré-imagem* de B por f.

Propriedades:

(i) $f^{-1}(B) = p_1(Gr(f) \cap (X \times B))$;

(ii) $f^{-1}(B) = f^{-1}(B \cap f(X))$;

(iii) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$;

(iv) $A \subseteq B \Rightarrow f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$;

(v) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;

(vi) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;

(vii) $f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$, assim $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$;

(viii) $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X) \subseteq B$ e $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$;

(ix) $f(f^{-1}(B)) = B, \forall\, B \subseteq Y \;\Leftrightarrow\; f$ é sobrejetora e, $f^{-1}(f(A)) = A, \forall\, A \subseteq X \;\Leftrightarrow\; f$ é injetora.

(x) $p_1^{-1}(A) = A \times Y$ e $p_2^{-1}(B) = X \times B$;

(xi) $C \subseteq (p_1(C) \times p_2(C))$, para todo $C \subseteq X \times Y$.

Observação 1.5.6. *Dada uma aplicação $f : X \to Y$, as imagens direta e inversa por f de subconjuntos induzem*

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathcal{P}(X) & \to & \mathcal{P}(Y) \\ A & \mapsto & f(A) \end{array} \qquad e \qquad \begin{array}{rcl} \mu : \mathcal{P}(Y) & \to & \mathcal{P}(X) \\ B & \mapsto & f^{-1}(B) \end{array}.$$

Estas aplicações são denominadas aplicações imagem direta e imagem inversa por f, respectivamente e, como veremos no Capítulo 3, são importantes para mostrar porque as aplicações abertas e as aplicações contínuas são as aplicações consideradas e estudadas em Topologia.

Definição 1.5.7. *Seja $f : X \to Y$ uma aplicação. Dizemos que:*

(1) *f é **injetora** se $f(x) \neq f(y)$ quando $x \neq y$. Equivalentemente, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.*

(2) *f é **sobrejetora** se $f(X) = Y$, ou seja, $\forall\, y \in Y$, $\exists\, x \in X$ tal que $y = f(x)$.*

(3) *f é **bijetora** se f é injetora e sobrejetora.*

Exemplo 1.5.8. 1) *Se $A \subseteq X$, então a inclusão $i_A : A \to X$ dada por $i_A(x) = x$ é injetora. E temos que i_A é sobrejetora se, e somente se, $A = X$.*

2) *Seja $f : X \to Y$ uma aplicação. Então a aplicação $F : X \to X \times Y$, dada por $F(x) = (x, f(x))$ é injetora.*

3) *As projeções p_1 e p_2 são sobrejetoras.*

4) *$c : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, $c(A) = X - A = A^c$ é bijetora.*

Proposição 1.5.9. *Sejam X e Y conjuntos não vazios e $f : X \to Y$ uma aplicação.*

(i) *$f : X \to Y$ é injetora se, e somente se, $f^{-1}(f(A)) = A$, para todo $A \subseteq X$.*

(ii) *$f : X \to Y$ é sobrejetora se, e somente se, $f(f^{-1}(B)) = B$, para todo $B \subseteq Y$.*

Demonstração. A demostração é deixada como exercício. □

Aplicação Inversa*:** Seja $f : X \to Y$ uma aplicação bijetora. Então, dado $y \in Y$, existe um único $x \in X$ tal que $y = f(x)$. Definimos $f^{-1} : Y \to X$ por $f^{-1}(y) = x$. Nessas condições, f^{-1} é uma aplicação, chamada ***aplicação inversa de f.

Composição de Aplicações*:** Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ duas aplicações. A aplicação $g \circ f : X \to Z$ definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ é chamada a ***aplicação composta de f e g.

Propriedades:

(i) Se f e g são aplicações injetoras (sobrejetoras, bijetoras), então $g \circ f$ é injetora (sobrejetora, bijetora);

(ii) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$;

(iii) se $f : X \to Y$, então $f \circ i_X = i_Y \circ f = f$;

(iv) se $f : X \to Y$, então $f \circ f^{-1} = i_Y$ e $f^{-1} \circ f = i_X$;

(v) para todo $A \subseteq X$, $g \circ f(A) = g(f(A))$;

(vi) para todo $B \subseteq Y$, $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$;

(vii) se f e g são aplicações bijetoras, então $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

1.6 Famílias

Algumas vezes o domínio de uma aplicação é usado como um conjunto de índices e a aplicação procede a indexação de elementos de seu contradomínio.

Uma ***família*** de elementos de um conjunto B com índices num conjunto A é uma aplicação $f : A \to B$. A aplicação ou a família é representada por $\{b_a\}_{a \in A}$ onde $b_a = f(a)$.

Uma *sequência* de elementos de X é uma família de elementos de X indexada por $\mathbb{N}^*$. $f : \mathbb{N}^* \to X$ que é representada por $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ ou simplesmente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Seja $\{A_k\}_{k \in L}$ uma família de subconjuntos de um conjunto X indexada pelo conjunto L. A reunião dessa família é o conjunto

$$\bigcup_{k \in L} A_k = \{x \in X : x \in A_k, \text{ para algum } k \in L\},$$

e a interseção da família é o conjunto

$$\bigcap_{k \in L} A_k = \{x \in X : x \in A_k, \text{ para todo } k \in L\}.$$

Exemplo 1.6.1. *Considere a família* $A_n =]-1/n,\ 1/n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ *de intervalos abertos da reta. É fácil verificar que* $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n =]-1, 1[$ *e* $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \{0\}$.

Propriedades:

(i) $\left(\bigcup_{k \in K} A_k\right)^c = \bigcap_{k \in K} A_k^c$;

(ii) $\left(\bigcap_{k \in K} A_k\right)^c = \bigcup_{k \in K} A_k^c$;

(iii) $(\bigcup_{k\in K} A_k) \cap (\bigcup_{m\in M} B_m) = \bigcup_{(k,m)\in K\times M}(A_k \cap B_m)$;

(iv) $(\bigcap_{k\in K} A_k) \cap (\bigcap_{m\in M} B_m) = \bigcap_{(k,m)\in K\times M}(A_k \cap B_m)$;

(v) $f(\bigcup_{k\in KA_k}) = \bigcup_{k\in K} f(A_k)$;

(vi) $f(\bigcap_{k\in KA_k}) \subseteq \bigcap_{k\in K} f(A_k)$;

(vii) $f^{-1}(\bigcap_{m\in M} B_m) = \bigcap_{m\in M} f^{-1}(B_m)$;

(viii) $f^{-1}(\bigcup_{m\in M} B_m) = \bigcup_{m\in M} f^{-1}(B_m)$.

1.6.1 Exercício

1) Prove que o conjunto dos números naturais pode ser representado como uma reunião infinita de subconjuntos infinitos, dois a dois disjuntos.

1.7 Partições e Relações de Equivalência

Uma ***partição*** de um conjunto X é uma família não vazia e disjunta $\{X_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos não vazios de X, cuja reunião é X.

Exemplo 1.7.1. 1) $\{[n, n+1[\,\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *é uma partição de* $\mathbb{R}$.
2) $\{\{(x, y_0) : x \in \mathbb{R}\}\}_{y_0\in\mathbb{R}}$ *é uma partição de* $\mathbb{R}^2$.

Seja $\sim$ uma relação de equivalência sobre um conjunto X. Dado $x \in X$, a ***classe de equivalência*** determinada por x é o conjunto

$$[x\,] = \{y \in X : y \sim x\}.$$

Proposição 1.7.2. *As classes de equivalência distintas formam uma partição de X e dada uma partição de X, existe uma relação de equivalência sobre X cujas classes de equivalência são os conjuntos da partição.*

Demonstração. Exercício. □

1.7.1 Exercício

1) Seja $f : X \to Y$ uma aplicação. Considere a relação em X

$$x \sim x' \Leftrightarrow f(x) = f(x').$$

Prove que $\sim$ é uma relação de equivalência sobre X e determine suas classes de equivalência.

1.7.2 Conjunto Quociente

Se $\sim$ é uma relação de equivalência sobre X e $[x]$ indica a classe de equivalência do elemento $x \in X$, o conjunto

$$X/\sim\ =\ \{[x] : x \in X\}$$

é o ***conjunto quociente*** de X pela relação de equivalência $\sim$.

A aplicação $q : X \to X/\sim$ dada por $q(x) = [x]$ é a ***aplicação quociente*** ou ***projeção quociente***. Notemos que q é sobrejetora e $q(x) = q(y)$ se, e somente se, $x \sim y$.

Proposição 1.7.3. *Seja $f : X \to Y$ uma aplicação. Considerando a relação sobre X dada por $x \sim x'$ se, e somente se, $f(x) = f(x')$, existe uma única aplicação $\alpha : X/\sim\ \to Y$ tal que $\alpha \circ q = f$, que é injetora. Se f é sobrejetora, então α é bijetora.*

1.8 Equipotência de Conjuntos

Dois conjuntos são ***equipotentes***, e escrevemos $X \cong Y$, se existe uma bijeção entre eles.

Exemplo 1.8.1. 1) $\mathbb{N} \cong \mathbb{N} - \{0\}$.

2) $\mathbb{N} \cong \mathbb{Z}$.

3) $\mathbb{N} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. (*Considere $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dada por $f(x,y) = \dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2+y}$. A justificativa de que f é bijetora pode ser encontrada em Izar e Tadini [10], p. 47*).

4) $]-1,1[\ \cong\ \mathbb{R}$, ($f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$ *é bijetora*).

***Propriedades*:**

(i) Para todo conjunto X, $X \cong X$;

(ii) Para quaisquer dois conjuntos X, Y, tem-se $X \cong Y \Rightarrow Y \cong X$;

(iii) Dados X, Y e Z, $X \cong Y$ e $Y \cong Z \Rightarrow X \cong Z$.

Logo, equipotência é uma relação de equivalência.

Seja $I_n = \{1,2,3,\ldots,n\}$. Dizemos que um conjunto X é ***finito*** se $X = \emptyset$ ou X é equipotente a I_n, para algum $n \in \mathbb{N}$. O conjunto X é ***infinito*** se não é finito.

Exemplo 1.8.2. 1) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *são conjuntos infinitos.*

2) *Se A é um conjunto finito, então $\mathcal{P}(A)$ é finito.*

O teorema abaixo estabelece a equipotência entre os conjuntos de uma maneira indireta.

Teorema 1.8.3 (Teorema de Schröeder-Bernstein)**.** *Se X é equipotente a um subconjunto de Y e Y é equipotente a um subconjunto de X, então X e Y são equipotentes.*

1.8.1 Exercício

1) Prove que A e $\mathcal{P}(A)$ não são equipotentes (Teorema de Cantor). (*Sugestão*: Se $f : A \to \mathcal{P}(A)$ é uma bijeção, considere $A_0 = \{a \in A : a \notin f(a)\}$. Existe $a_0 \in A$ tal que $f(a_0) = A_0$. Verifique que a existência de a_0 produz uma contradição.)

1.8.2 Conjuntos Enumeráveis

Definição 1.8.4. *Um conjunto X é* ***enumerável ou contável*** *se X é finito ou X é equipotente a* $\mathbb{N}$.

Proposição 1.8.5. *Se A é enumerável e* $f : A \to B$ *é sobrejetora, então B é enumerável.*

Uma família enumerável é uma família cujo conjunto de índices é enumerável.

Exemplo 1.8.6. 1) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ *e* $\mathbb{Q}$ *são enumeráveis.*

2) $]0,1[$ *não é enumerável.*

3) $\mathbb{R}$ *não é enumerável.*

1.9 Produtos Infinitos, Axioma da Escolha e Lema de Zorn

Definição 1.9.1. *Seja* $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k\in L}$ *uma família de conjuntos (subconjuntos de um conjunto* U*) indexados em* $L \neq \emptyset$. *O* ***produto cartesiando da família*** $\mathcal{A}$ *é o conjunto*

$$\prod_{k\in L} A_k := \{f : L \to \bigcup_{k\in L} A_k;\ f \text{ é aplicação e } f(k) \in A_k,\ \forall\, k \in L\}.$$

Um elemento $f \in \prod_{k\in L} A_k$ *será denotado por* $f = (f(k))_{k\in L}$*, ou ainda,* $f = (x_k)_{k\in L}$*, considerando* $x_k = f(k)$, $k \in L$.

Note que $\prod_{k\in L} A_k \subseteq \mathfrak{F}(L, \bigcup_{k\in L} A_k) := \{f : L \to \bigcup_{k\in L} A_k; f \text{ aplicação}\}$, mas estes dois conjuntos, em geral, não são iguais.

Exemplo 1.9.2. *Caso finito. No caso em que a família L é finita, digamos* $L = \{1,\ldots,n\}$*, podemos identificar o produto cartesiano* $\prod_{k=1,\ldots,n} A_k$ *definido acima, com o produto cartesiano (finito)* $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ *apresentado na Seção 1.3, pois:*

• *a cada aplicação* $f : \{1,2,\ldots,n\} \to A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n$ *tal que* $f(k) \in A_k$, $\forall\, k = 1,\ldots,n$, *pode-se associar uma n-upla* $(f(1),\ldots,f(n)) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ *e, reciprocamente,*

• *toda n-upla* $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ *pode ser vista como uma aplicação* $f : \{1,2,\ldots,n\} \to A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n$ *tal que* $f(k) = x_k \in A_k$, $k = 1,2,\ldots,n$.

Exemplo 1.9.3. *Sejam* $L \neq \emptyset$ *um conjunto de índices e* Y *um conjunto não vazio, se* $A_k = Y$ *para todo elemento da família* $\{A_k\}_{k\in L}$*, então* $\prod_{k\in L} A_k = \mathfrak{F}(L,\, Y)$ *o conjunto das aplicações de L em Y, também denotado por* Y^L.

Exemplo 1.9.4. *Se* $L = \mathbb{N}^*$ *e* $A_k = \mathbb{R}$*, para todo* $k \in L$*, então um elemento* f *do produto cartesiano* $\prod_{k\in\mathbb{N}^*} A_k = \mathfrak{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$ *é tal que* $f(k) = x_k \in \mathbb{R}$*, para todo* $k \in \mathbb{N}^*$*. Assim os elementos do produto cartesiano são as sequências* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *de números reais. Esse conjunto é também denotado por* $\mathbb{R}^{\omega}$*.*

Exemplo 1.9.5. *Se* $A_k = \emptyset$ *para algum* $k \in L$*, então* $\prod_{k\in L} A_k = \emptyset$*.*

1.9.1 Axioma da Escolha

Seja $\{A_k\}_{k\in L}$ uma família de subconjuntos de um conjunto S. Uma aplicação $f : L \to \bigcup_{k\in L} A_k$ tal que $f(k) \in A_k$, para todo $k \in L$ é chamada uma ***função escolha para a família*** $\{A_k\}_{k\in L}$.

Observamos que produto cartesiano da família é o conjunto de todas as funções escolha da família, e que para estabelecer que o produto cartesiano de uma família de conjuntos não vazios é não vazio, é suficiente mostrar a existência de uma função escolha para a família. O fato de cada conjunto A_k ser não vazio não é suficiente para se definir uma função $f : L \to \bigcup_{k\in L} A_k$, cuja definição supõe uma definição precisa do que é $f(k)$, para cada k. Não basta A_k ser não vazio, é necessário um critério de escolha do elemento de A_k que seria a imagem de k por f. De fato isso não é demonstrável para L um conjunto qualquer de índice. Tal afirmação é uma das formulações do Axioma da Escolha.

No caso finito o problema acima não ocorre, pois dados A_1 e A_2, um elemento do produto cartesiano é um par $f = (f(1), f(2))$ cuja existência é confirmada por exibição. Porém, quando quando L é um conjunto infinito e não existe uma maneira explícita e bem determinada de escolher um único elemento de A_k, cada $k \in L$ o axioma é necessário.

Uma comparação bastante interessante e curiosa para explicar o axioma da escolha foi apresentada por Bertrand Russell (1872-1970): para escolhermos uma meia de cada par de meias, dentre uma coleção infinita de pares de meias, precisamos usar o axioma da escolha; se forem sapatos, não precisamos. Isso porque, no caso dos sapatos, podemos escolher o pé direito de cada par, e, no caso das meias, os pés de cada par são indistinguíveis.

Note que se consideramos $Y = \bigcup_{k\in L} A_k$ e a aplicação $F : L \to \mathcal{P}(Y)$ definida por $F(k) = A_k$, $k \in L$, então cada elemento de $\prod_{k\in L} A_k$, ou seja, cada aplicação $f : L \to Y = \bigcup_{k\in L} A_k$ tal que $f(k) \in A_k = F(k)$ é uma *função escolha* (relacionada a aplicação F), como na Observação 1.5.3.

Axioma da Escolha **(1):** *O produto cartesiano de uma família não vazia de conjuntos não vazios é não vazio.*

Uma formulação equivalente para o Axioma da Escolha é:

Axioma da Escolha **(2):** *Toda família não vazia de conjuntos não vazios tem uma função escolha.*

O Axioma da Escolha admite outras formulações equivalentes. Damos abaixo duas delas que estão relacionadas com as ordens em um conjunto. A primeira é o Teorema de Zermelo e a segunda é o Lema de Zorn.

Sejam X um conjunto com uma relação de ordem parcial $\leq$. Se todo subconjunto não vazio de X tem um menor elemento relativamente a esta ordem, isto é, para todo $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$, existe $a \in A$ tal que $a \leq x$, para todo $x \in A$, diz-se que $\leq$ é uma ***boa ordem*** ou uma ***boa ordenação*** para X e que que X é ***bem ordenado***.

1.9.2 Teorema de Zermelo

Teorema 1.9.6 (Zermelo)**.** *Todo conjunto pode ser bem ordenado.*

O Teorema de Zermelo é equivalente ao Axioma da Escolha. A demonstração do Teorema de Zermelo a partir do Axioma da Escolha é muito difícil (vide Izar e Tadini [10], p. 66), mas a recíproca é fácil e é deixada como exercício para o leitor.

1.9.3 Lema de Zorn

Definição 1.9.7. *Sejam X um conjunto e $\leq$ uma relação de ordem parcial sobre X. Um elemento $m \in X$ é **elemento maximal** de X se não existe $x \in X$, $x \neq m$, tal que $m \leq x$. Uma **cadeia** de X é um subconjunto não vazio A de X totalmente ordenado, ou seja, para todos $x, y \in A$, tem-se $x \leq y$ ou $y \leq x$. Um elemento $s \in X$ é um **limite superior** (ou majorante) de A se $a \leq s$, para todo $a \in A$.*

Lema 1.9.8 (Zorn)**.** *Seja X um conjunto não vazio parcialmente ordenado. Se toda cadeia de X tem um limite superior, então X tem um elemento maximal.*

O Lema de Zorn é muito usado na Matemática. Faremos uso do Lema de Zorn (no Cap. 4) para demonstrar o Teorema de Alexander que dá uma condição necessária e suficiente para a compacidade de um espaço a partir de uma sub-base para a topologia do espaço.

Damos a seguir uma ilustração do uso do Lema de Zorn, demonstrando um teorema importante da Álgebra Linear.

Teorema 1.9.9. *Todo espaço vetorial tem uma base.*

Demonstração. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K. Uma base de V é um subconjunto $B \subseteq V$ linearmente independente que gera o espaço, ou equivalentemente, um conjunto linearmente independente maximal, no sentido que acrescido de qualquer vetor do espaço, o conjunto B passa a ser lineramente dependente.

Definimos $\mathcal{U} = \{A \subseteq V : A \text{ é linearmente independente}\}$. O Teorema fica demonstrado se provarmos que $\mathcal{U}$ tem um elemento maximal com relação à relação de ordem parcial dada pela inclusão de conjuntos. Então, sobre $\mathcal{U}$ considere a ordem parcial dada pela inclusão e seja $\mathcal{A} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ uma cadeia de elementos de $\mathcal{U}$. A cadeia $\mathcal{A}$ tem um limite superior $M = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Deixamos como exercício a verificação de que M é linearmente independente e que é maximal.

Assim, pelo Lema de Zorn, $\mathcal{U}$ tem um elemento maximal $\mathcal{B}$, que é uma base de V. $\square$

Capítulo 2

Espaços Topológicos

"A Topologia é precisamente a disciplina matemática que permite a passagem do local ao global."

(René Thom, Stabilité Structurelle et Morphogenese- 1926)

2.1 Topologias

Iniciamos com a definição da estrutura matemática de topologia sobre um conjunto, e definimos espaço topológico como um conjunto munido de uma estrutura topológica. Alguns exemplos são dados, dentre os quais o mais importante: a topologia natural de um espaço métrico, ou seja, a topologia definida sobre um espaço métrico a partir de sua métrica.

Num curso de Topologia Geral, exemplos de espaços topológicos são de fundamental importância. É uma tarefa às vezes muito difícil exibir um espaço topológico que tem determinadas propriedades e deixa de ter outras propriedades consideradas, de modo que quanto maior o número de exemplos conhecidos, mais interessantes serão as ilustrações para os conceitos introduzidos e maior é a probabilidade de se exibir contraexemplos para mostrar que uma determinada propriedade não é verdadeira, não é implicada, ou não implica em outra.

Definição 2.1.1. *Seja $S \neq \emptyset$. Se $\sigma \subseteq \mathcal{P}(S)$ (onde $\mathcal{P}(S)$ é o conjunto de todos os subconjuntos de S) é tal que:*

(1) $\emptyset \in \sigma$ *e* $S \in \sigma$*;*

(2) *se* $G_i \in \sigma$*,* $i = 1,2$*, então* $G_1 \cap G_2 \in \sigma$*;*

(3) *se* $G_\lambda \in \sigma$*,* $\lambda \in L$*, então* $\bigcup_{\lambda \in L} G_\lambda \in \sigma$*;*

*então dizemos que σ é uma **topologia** em S. O par (S,σ) é denominado um **espaço topológico** e os elementos de σ são chamados conjuntos **abertos** do espaço S.*

Observação 2.1.2. *A condição (2) da definição anterior é equivalente a afirmar que, se $G_i \in \sigma$, $i = 1,2,\ldots,n$, então $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \sigma$.*

Exemplo 2.1.3. 1) *Seja* $S = \{a,b,c\}$ *e considere os seguintes subconjuntos de* $\mathcal{P}(S)$*:* $\sigma_1 = \{\emptyset, S\}$, $\sigma_2 = \{\emptyset, \{a\}, S\}$, $\sigma_3 = \{\emptyset, \{a\}, \{b,c\}, S\}$, $\sigma_4 = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, S\}$, $\sigma_5 = \mathcal{P}(S)$. *Todos eles determinam topologias em S.*

2) *Para qualquer conjunto não vazio S,* $\sigma_1 = \{\emptyset, S\}$ *e* $\sigma_2 = \mathcal{P}(S)$ *são topologias em S* (*com* $\sigma_1 \neq \sigma_2$ *se S possui mais de um elemento*). σ_1 *é denominada* ***topologia caótica*** *ou* ***indiscreta*** *e* σ_2 *é chamada de* ***topologia discreta****. Em geral usaremos* σ_{cao} *e* σ_{dis} *para denotar as topologias caótica e discreta, respectivamente.*

3) *Sejam S um conjunto infinito e*

$$\sigma_{cof} := \{\emptyset\} \cup \{G \subseteq S : S - G \text{ é finito}\}.$$

σ_{cof} *é uma topologia em S, denominada* ***topologia cofinita****.*

2.1.1 Topologia usual de um Espaço Métrico

Definição 2.1.4. *Um* ***espaço métrico*** *é um par ordenado* (M,d)*, onde M é um conjunto não vazio e* $d : M \times M \to \mathbb{R}$ *é uma aplicação* (*chamada* ***métrica*** *ou* ***função distância***)*, que satisfaz as seguintes condições:*

(1) $d(x,y) \geq 0$ *e* $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$*, para todos* $x,y \in M$*;*

(2) $d(x,y) = d(y,x)$*, para todos* $x,y \in M$*;*

(3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$*; para todos* $x,y,z \in M$.

Dados uma métrica d sobre M, e $x,y \in M$, o número real $d(x,y)$ é chamado a ***distância*** entre x e y na métrica d.

Se $r > 0$ e $x_0 \in M$, a ***bola aberta*** *de centro* x_0 e *raio* r é o conjunto

$$B(x_0,r) = \{x \in M : d(x,x_0) < r\}.$$

Este conjunto é denotado também, às vezes, por $B_r(x_0)$, ou ainda $B_d(x_0,r)$, se queremos destacar a métrica d usada. Dizemos que um subconjunto G de um espaço métrico (M,d) é ***aberto*** se, para todo $x \in G$, existe $r > 0$, de modo que $B(x_0,r) \subseteq G$.

Dado (M,d) um espaço métrico, vamos denotar $\sigma_d = \{G \subseteq M : G \text{ é aberto}\}$.

Proposição 2.1.5. *Se* (M,d) *é um espaço métrico então* $\sigma_d = \{G \subseteq M : G \text{ é aberto}\}$ *é uma topologia em M e, portanto,* (M,σ_d) *é um espaço topológico.* (σ_d *é denominada* ***topologia induzida pela métrica*** d).

Demonstração. (1) $\emptyset$ e M estão em σ_d, pois claramente são abertos em M.

(2) Sejam $G_1, G_2 \in \sigma_d$ e $p \in G_1 \cap G_2$. Como G_1 e G_2 são abertos, existem $r_1, r_2 > 0$ tais que $B(p, r_1) \subseteq G_1$ e $B(p, r_2) \subseteq G_2$. Seja $r = \min\{r_1, r_2\}$. Então, $r > 0$ e $B(p, r_1) \subseteq G_i$, $i = 1, 2$. Logo $B(p, r) \subseteq G_1 \cap G_2$ e portanto $G_1 \cap G_2 \subseteq \sigma_d$.

(3) Sejam $G_\lambda \in \sigma_d$, $\lambda \in L$. Se $p \in \bigcup_{\lambda \in L} G_\lambda$, então $p \in G_{\lambda_0}$, para algum $\lambda_0 \in L$. Como $G_{\lambda_0} \in \sigma_d$, existe $r > 0$ tal que $B(p, r) \subseteq G_{\lambda_0} \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} G_\lambda$, e portanto $\bigcup_{\lambda \in L} G_\lambda \in \sigma_d$. $\square$

A ***topologia usual*** da reta $\mathbb{R}$ é a induzida pela métrica

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Nesta topologia, um conjunto A é aberto se, para cada $a \in A$, existe $\varepsilon > 0$ de modo que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq A$.

A *topologia usual* do plano $\mathbb{R}^2$ é a induzida pela métrica euclidiana

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

onde $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$.

Mais geralmente, a *topologia usual* do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, é a induzida pela métrica

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},$$

com $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Denotaremos a topologia usual do $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, \ldots$, por σ_{usual}.

São também métricas sobre $\mathbb{R}^n$:

$$d_{mod}(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|,$$

$$d_{max}(x, y) = max\{|x_1 - y_1|, \cdots, |x_n - y_n|\}.$$

Ainda, se $(M_1, d_1), ..., (M_n, d_n)$ são espaços métricos podemos falar no ***produto de espaços métricos*** (e consequentemente nas topologias induzidas no produto) por considerar em $M = M_1 \times ... \times M_n$ métricas similares às definidas acima em $\mathbb{R}^n$, mais precisamente, as aplicações/métricas (verifique!) $D, D_1, D_2 : M \to \mathbb{R}_+$, definidas por

$$D(x, y) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + \cdots + d_n(x_n, y_n)^2},$$

$$D_1(x, y) = d_1(x_1, y_1) + \cdots + d_n(x_n, y_n),$$

$$D_2(x, y) = max\{d_1(x_1, y_1), \cdots, d_n(x_n, y_n)\},$$

sendo $x = (x_1, \cdots x_n)$, $y = (y_1 \cdots y_n)$ elementos de M.

As seguintes relações entre essas métricas são válidas:

$$D_2(x,y) \leq D(x,y) \leq D_1(x,y) \leq nD_2(x,y),$$

para todos $x,y \in M$.

Definição 2.1.6. *Dizemos que duas métricas d e d' sobre um conjunto não vazio M são* ***equivalentes*** *se para cada $p \in M$, dada uma bola qualquer $B_d(p,\varepsilon)$, existe $\lambda > 0$ de modo que $B_{d'}(p,\lambda) \subseteq B_d(p,\varepsilon)$ e, também, para qualquer bola $B_{d'}(p,\varepsilon)$, existe $\gamma > 0$ de modo que $B_d(p,\gamma) \subseteq B_{d'}(p,\varepsilon)$.*

Observação 2.1.7. *Duas métricas d e d' sobre M são equivalentes se, e somente se, determinam a mesma topologia sobre M (isto é, $\sigma_d = \sigma'_d$, verifique!) Pode-se mostrar que as três métricas para $\mathbb{R}^n$ e para $M = M_1 \times ... \times M_n$ definidas anteriormente são equivalentes, assim determinam os mesmos abertos fornecendo a mesma estrutura topológica para $\mathbb{R}^n$ e M, respectivamente. (Domingues [4], p. 58-59.)*

Definição 2.1.8. *Dizemos que um espaço topológico (S,σ) é* ***metrizável*** *se existe uma métrica $d : S \times S \to \mathbb{R}$ tal que $\sigma = \sigma_d$ (isto é, a topologia do espaço é a topologia induzida de uma alguma métrica).*

Exemplo 2.1.9. 1) *($\mathbb{R}^n$, σ_{usual}) é metrizável (pela forma que foi definida a topologia).*

2) *Para todo conjunto S não vazio, $(S,\sigma = \mathcal{P}(S))$ é metrizável pois $\sigma = \sigma_{d_{01}}$, onde a métrica "zero-um" sobre S, $d_{01} : S \times S \to \mathbb{R}$, é assim definida:*

$$d(x,x) = 0, \text{ para todo } x \in S \quad \text{e} \quad d(x,y) = 1, \text{ sempre que } x \neq y.$$

Reconhecer se um dado espaço topológico é metrizável é um problema extremamente difícil. A topologia induzida por uma métrica tem propriedades muito interessantes e, é claro, se uma topologia deixa de ter alguma propriedade que a topologia induzida de uma métrica tem, ela não provém de uma métrica. Por exemplo, *se (S,σ) é um espaço topológico e $S - \{a\} \notin \sigma$ para algum $a \in S$, então (S,σ) não é metrizável*, isto é, não existe uma métrica d em S tal que $\sigma = \sigma_d$, pois em um espaço métrico, o complementar de um ponto, ou mais precisamente de um conjunto unitário, é sempre um aberto (uma vez que dado $p \in S - \{a\}$, tomando $\varepsilon = d(p,a)/2 > 0$, temos $B(p,\varepsilon) \subseteq S - \{a\}$). Desta forma, estabeleceremos, estudando propriedades dos espaços métricos, muitas condições necessárias para que um espaço topológico seja metrizável (dentre elas a condição de ser Hausdorff, dada abaixo). Condições suficientes são raras e condições necessárias e suficientes foram estabelecidas posteriormente, mas são muito complicadas. Neste texto veremos, no Capítulo 6, uma condição suficiente dada pelo *Teorema de Metrização de Urysohn* (Teorema 6.5.12). Uma condição necessária e suficiente é dada pelo *Teorema de Nagata-Smirnov* e *Teorema de Smirnov*. As demonstrações desses dois últimos resultados não serão apresentadas aqui. Daremos apenas uma noção dos mesmos (Teorema 6.6.3; Teorema 6.6.11).

Definição 2.1.10. *Dizemos que um espaço topológico (S,σ) é de* ***Hausdorff*** *se, dados $x,y \in S$, $x \neq y$, existem abertos G_1 e G_2 tais que $x \in G_1$, $y \in G_2$ e $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.*

Exemplo 2.1.11. $(\mathbb{R}, \sigma_{usual})$ *é um espaço de Hausdorff.*

Mais geralmente, temos:

Proposição 2.1.12. *Todo espaço métrico* (M,d) *é de Hausdorff.*

Corolário 2.1.13. *Se um espaço topológico* (S,σ) *não é de Hausdorff então* (S,σ) *não é metrizável.*

Exemplo 2.1.14. 1) $(\mathbb{R}, \sigma_{cof})$ *não é um espaço de Hausdorff (pois, dados* $x \neq y$ *em* $\mathbb{R}$*, se* G_1 *e* G_2 *são abertos contendo x, y, respectivamente, então* $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$*), logo não é metrizável. Note que para todo ponto* $x \in \mathbb{R}$*,* $\mathbb{R} - \{x\}$ *é aberto.*

2) *Se S tem pelo menos dois pontos,* $S \supseteq \{p,q\}$*, então* (S, σ_{cao}) *não é de Hausdorff e assim não é metrizável. Note que nesse caso poderíamos concluir que* (S, σ_{cao}) *não é metrizável usando que o complementar de conjuntos unitários não são abertos.*

Definição 2.1.15. *Sejam* (M,d) *um espaço métrico e X um subconjunto de M. Dizemos que X é* ***limitado*** *quando existe um numero real* $k \geq 0$ *tal que* $d(x,y) \leq k$ *quaisquer que sejam* x,y *em* X*. O menor desse números chama-se* ***diâmetro*** *de X e denota-se* $d(X)$ *ou* $\delta(X)$*. Assim, diâmetro de X é o número real positivo*

$$d(X) = \sup\{d(x,y) : x,y \in X\}.$$

2.1.2 Subespaço Topológico e comparação de topologias

Sejam (S,σ) um espaço topológico e $X \subseteq S$. Então $\sigma_X = \{G \cap X : G \in \sigma\}$ é uma topologia sobre X, de modo que (X, σ_X) é um espaço topológico. σ_X é chamada ***topologia do subespaço*** X, ***topologia relativa*** *em* X ou ainda ***topologia induzida*** por σ sobre X e (X, σ_X) é denominado ***subespaço topológico*** de (S,σ).

Observação 2.1.16. *Se X é subespaço de S e A é aberto em X, então existe G aberto de S tal que* $A = G \cap X$.

A título de ilustração temos:

Exemplo 2.1.17. 1) *A topologia usual do plano* $\mathbb{R}^2$ *induz a topologia usual na reta* $\mathbb{R}$*, quando identificamos* $\mathbb{R}$ *com o subconjunto* $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ *de* $\mathbb{R}^2$.

2) *A topologia usual da reta real induz a topologia discreta no conjunto dos números inteiros.*

Definição 2.1.18. *Seja* (S,σ) *um espaço topológico. Um subconjunto* $F \subseteq S$ *é* ***fechado*** *relativamente a* σ *se,* $F^c = S - F$ *é aberto.*

Exemplo 2.1.19. 1) *Seja* $S = \{a,b,c\}$ *com a topologia* $\sigma = \{\emptyset, S, \{a\}, \{a,b\}\}$*. Os subconjuntos fechados de* (S,σ) *são* $\emptyset$*, S,* $\{b,c\}$ *e* $\{c\}$.

2) *No espaço topológico* $(\mathbb{R}, \sigma_{usual})$, $\mathbb{N}$ *é fechado, pois*

$$\mathbb{R} - \mathbb{N} = \,]-\infty, 0[\, \cup \,]0,1[\, \cup \,]1,2[\, \cup \cdots$$

é aberto (*reunião de abertos*).

3) *No espaço* (S, σ_{cof}) *os conjuntos fechados são os subconjuntos finitos e S.*

Proposição 2.1.20. *Seja* (S, σ) *um espaço topológico. Então:*

(i) $\emptyset$ *e* S *são conjuntos fechados;*

(ii) *se* F_1 *e* F_2 *são fechados, então* $F_1 \cup F_2$ *é fechado;*

(iii) *se* $F_\lambda \subseteq S$ *é fechado, para todo* $\lambda \in L$, *então* $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ *é fechado.*

Demonstração. (i) $\emptyset$ e S são fechados, pois $S = S - \emptyset$ e $\emptyset = S - S$ são complementos de abertos.

(ii) e (iii) Pelas leis de Morgan, $(F_1 \cup F_2)^c = F_1^c \cap F_2^c$ e $(\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda)^c = \bigcup_{\lambda \in L} F_\lambda^c$. Assim, os complementares da reunião de dois fechados e da interseção qualquer de fechados são expressos por uma interseção de dois abertos e uma reunião qualquer de abertos, respectivamente, e portanto abertos. □

Observação 2.1.21. *É possível definir uma topologia para S partindo dos "subconjuntos fechados". Seja* $\mathcal{F}$ *uma família de subconjuntos de S satisfazendo as três condições da Proposição 2.1.20, isto é,*

(i) $\emptyset$, $S \in \mathcal{F}$*;*

(ii) *se* F_1, $F_2 \in \mathcal{F}$, *então* $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$*;*

(iii) *se* $F_\lambda \in \mathcal{F}$, *para todo* $\lambda \in L$, *então* $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda \in \mathcal{F}$.

Definimos $\sigma := \{G \subseteq S : \, S - G \in \mathcal{F}\}$. *Então* σ *é uma topologia em S e os conjuntos fechados desta topologia são os elementos da família* $\mathcal{F}$. *Verifique.*

Definição 2.1.22. (Comparação de topologias). *Sejam* ξ *e* σ *duas topologias em S. Dizemos que* σ *é* ***mais fina*** *que* ξ (*ou que que* ξ *é* ***menos fina*** *que* σ) *se* $\xi \subseteq \sigma$.

Exemplo 2.1.23. *Seja* (S, σ) *um espaço topológico qualquer. Claramente* σ *é mais fina que a topologia caótica e menos fina que a topologia discreta em S.*

2.1.3 Exercícios

1) Prove que se $\{\sigma_\lambda\}_{\lambda \in L}$ é uma família de topologias em S, então $\sigma = \bigcap_{\lambda \in L} \sigma_\lambda$ é topologia em S.

2) Sejam $S \neq \emptyset$ e $\sigma_{coen} := \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq S : \, S - A$ é enumerável$\}$. Mostre que σ_{coen} é uma topologia em S. Esta topologia é denominada ***topologia coenumerável***.

3) Seja S um espaço topológico e A e B subconjuntos de S tais que $A \subseteq B$. Prove que as topologias de A como subespaço de B e como subespaço de S coincidem.

4) Sejam S um conjunto e $p \in S$. Mostre que $\sigma_1 = \{G \subseteq S : p \notin G\} \cup \{S\}$ e $\sigma_2 = \{G \subseteq S : p \in G\} \cup \{\emptyset\}$ são topologias em S.

5) Considere em $\mathbb{R}$ as topologias usual e cofinita. Mostre que a topologia usual de $\mathbb{R}$ é mais fina que a topologia cofinita.

6) Sobre $\mathbb{R}$ defina $\sigma = \{G \subseteq \mathbb{R} : \ \forall\, p \in G,\ \exists\, \varepsilon > 0$ tal que $[p, p+\varepsilon[\ \subseteq G\}$. Mostre que σ é uma topologia em $\mathbb{R}$ e compare σ com a topologia usual em $\mathbb{R}$.

7) Dê um exemplo para que mostrar que, se (S_1, σ_1) e (S_2, σ_2) são espaços métricos, $\sigma_1 \times \sigma_2 = \{A \times B : \ A \in \sigma_1,\ B \in \sigma_2\}$ não é em geral uma topologia para $S = S_1 \times S_2$.

8) Dados (S, σ) espaço topológico e $\emptyset \neq Y \subseteq S$, mostre que $X \subseteq Y$ é um fechado em Y se, e somente se, existe $F \subseteq S$, F fechado de S tal que $X = F \cap Y$. Mostre ainda, que se Y é fechado em S então X é fechado em Y se, e somente se, X é fechado em S. (Sims [23], Cap. 1, Exerc. 1-22, p. 30.)

2.2 Fecho, Interior, Derivado e Fronteira de um Subconjunto

Nesta seção, a um dado subconjunto de um espaço topológico são associados vários subconjuntos do espaço: fecho, interior, derivado e fronteira e consideraremos algumas de suas propriedades. Ressaltamos que qualquer um destes quatro conceitos poderia servir de conceito primitivo para definir topologia. Neste texto, como é mais frequente, o conceito primitivo escolhido foi o de conjunto aberto.

Definição 2.2.1. *Sejam (S, σ) um espaço topológico e $A \subseteq S$. Considere $\mathcal{F} = \{F : \ F \subseteq S$ é fechado e $F \supseteq A\}$, a família de todos os fechados de S contendo A. O **fecho** de A é o conjunto*

$$\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F.$$

*Os pontos do fecho de A são denominados pontos **aderentes** a A.*

Proposição 2.2.2. *Com as notações da definição acima, temos:*

(i) *$\overline{A}$ é fechado;*

(ii) *$A \subseteq \overline{A}$;*

(iii) *$x \in \overline{A}$ se, e somente se, para todo $G \in \sigma$ tal que $x \in G$ tem-se $G \cap A \neq \emptyset$;*

(iv) *A é fechado se e somente se $A = \overline{A}$*

(v) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$.

Demonstração. (i) $\overline{A}$ é interseção de fechados, logo é fechado.

(ii) $\overline{A}$ é a interseção de todos os fechados que contêm A, logo $A \subseteq \overline{A}$.

(iii) ($\Rightarrow$) Seja $x \in \overline{A}$. Suponhamos por absurdo que exista um aberto G com $x \in G$ e $G \cap A = \emptyset$. Então $F = S - G$ é fechado, $x \notin F$ e $F \supseteq A$. Daí, $\overline{A} \subseteq F$ e, em consequência, $x \notin \overline{A}$, o que nos dá uma contradição. Assim a condição é necessária.

($\Leftarrow$) Suponhamos $x \notin \overline{A}$. Então existe $G = (S - \overline{A}) \in \sigma$ tal que $x \in G$ e $G \cap A = \emptyset$, pois $G \cap A \subseteq G \cap \overline{A} = \emptyset$, contrariando a hipótese. Desta forma, a condição é suficiente.

(iv) ($\Rightarrow$) $\overline{A} \subseteq F$, para todo F fechado com $F \subseteq A$, então, como A é fechado e $A \subseteq A$, temos $\overline{A} \subseteq A$. Pelo item (ii) segue que $A = \overline{A}$.

($\Leftarrow$) Como $\overline{A}$ é fechado e $A = \overline{A}$, A é fechado.

(v) Seja $x \in \overline{A}$ e considere $G \in \sigma$ tal que $x \in G$. Por (iii), tem-se que $G \cap A \neq \emptyset$. Daí, usando a hipótese $A \subseteq B$, segue que $G \cap B \neq \emptyset$, e portanto $x \in \overline{B}$ (por (iii)). $\square$

Observação 2.2.3. *i) $\overline{A}$ é o menor (com relação a inclusão) subconjunto fechado de S que contém A. De fato, se F é um fechado que contém A, então F será um dos fechados da interseção que define $\overline{A}$, de modo que $\overline{A} \subseteq F$.*

ii) Segue da Proposição 2.2.2 (iii)*, que, um ponto $x \in S$ é ponto aderente de A se, e somente se, para todo $G \in \sigma$ com $x \in G$ tem-se $G \cap A \neq \emptyset$. Alguns autores definem $\overline{A}$ como o conjunto dos pontos que tem essa propriedade, isto é, são aderentes.*

Exemplo 2.2.4. *No espaço topológico $(\mathbb{R}, \sigma_{usual})$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, já que todo intervalo aberto da reta real contém um número racional, assim todo ponto real é ponto aderente. $\mathbb{Q}$ não é fechado uma vez que $\overline{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{Q}$,*

Proposição 2.2.5 (Axiomas de Kuratowski)**.** *Se (S, σ) é um espaço topológico e $A, B \subseteq S$. Então*

(i) $\overline{\emptyset} = \emptyset$;

(ii) $A \subseteq \overline{A}$;

(iii) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$;

(iv) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Demonstração. (i) $\emptyset$ é fechado, logo $\overline{\emptyset} = \emptyset$;

(ii) Este item é o item (ii) da Proposição 2.2.2;

(iii) $\overline{A}$ é fechado, logo coincide com o seu fecho;

(iv) $A \subseteq \overline{A}$ e $B \subseteq \overline{B}$, logo $A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ que é fechado. Então $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Por outro lado, $A \subseteq A \cup B \subseteq \overline{A \cup B}$ e $B \subseteq A \cup B \subseteq \overline{A \cup B}$, logo $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ e $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$, então $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Assim, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. $\square$

Observação 2.2.6. *É possível* definir uma topologia sobre S a partir da noção primitiva de fecho de um conjunto. *Mais precisamente, seja* $f : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$ *uma aplicação. Vamos denotar* $f(A)$ *por* $\overline{A}$ *e suponhamos que os quatro axiomas de Kuratowski estejam satisfeitos* (*ou seja,* (i) $f(\emptyset) = \emptyset$, (ii) $A \subseteq f(A)$, (iii) $f(f(A)) = f(A)$ *e* (iv) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$). *Dizemos que um subconjunto* F *de* S *é "fechado" se* $f(F) = F$*, e os abertos são os complementos dos fechados. Podemos facilmente verificar que*

$$\sigma = \{G \subseteq S : \ G \text{ é aberto}\} = \{G \subseteq S : \ f(S - G) = S - G\}$$

é uma topologia sobre S*, na qual* $f(A)$ *é exatamente o fecho de* A*. Inicialmente justificaremos o seguinte fato:*

$$A \subseteq B \ \Rightarrow \ \overline{A} \subseteq \overline{B}, \text{ mais precisamente, que } A \subseteq B \ \Rightarrow \ f(A) \subseteq f(B).$$

Para concluir isso, observemos que:

$$B = A \cup (B - A)) \ \Rightarrow \overline{B} = \overline{A \cup (B - A)} \ \Rightarrow \ \overline{B} = \overline{A} \cup \overline{(B - A)} \ \Rightarrow \ \overline{A} \subseteq \ \overline{B},$$

onde, na penúltima implicação, usou-se o axima (iv).

• *Para mostrar que* σ *é topologia verificaremos as condições para os fechados, de acordo com a Observação 2.1.21:*

(i) $\emptyset$ *e* S *são fechados, pois,* $\overline{\emptyset} = \emptyset$ (*axioma* (i))*, e* $S \subseteq \overline{S}$*, por axioma* (ii)*, donde* $S = \overline{S}$ (*claramente* $\overline{S} \subseteq S$*, visto que* $f(S) \in \mathcal{P}(S)$)*;*

(ii) *que a reunião de dois fechados é um fechado, segue diretamente do axioma* (iv)*;*

(iii) *seja agora* $\{F_\lambda, \ \lambda \in L\}$ *uma família qualquer de fechados de* S*. Temos* $\bigcap F_\lambda \subseteq \overline{\bigcap F_\lambda}$ $(*)$*, pelo axioma* (ii)*. Como* $\bigcap F_\lambda \subseteq F_\mu$*, para todo* $\mu \in L$*, segue, do fato justificado acima, que* $\overline{\bigcap F_\lambda} \subseteq \overline{F_\mu} = F_\mu$*, donde* $\overline{\bigcap F_\lambda} \subseteq \bigcap F_\mu = \bigcap F_\lambda$ $(**)$*. De* $(*)$ *e* $(**)$*, vem* $\overline{\bigcap F_\lambda} = \bigcap F_\lambda$ *e a interseção de fechados é um fechado.*

• *Resta a verificação de que, nesta topologia,* $f(A)$ *é o fecho de* A*. Para maior clareza, nesta parte não usaremos a notação* $\overline{A}$ *para representar* $f(A)$*. Sejam* $A \subseteq S$ *e* F *um fechado que contém* A*. Vem, de* $A \subseteq F$*, que* $f(A) \subseteq f(F) = F$*. Assim* $f(A)$ *está contido em todo fechado que contém* A*, de modo que* $f(A)$ *está contido na interseção de todos os fechados que contêm* A*, ou seja* $f(A) \subseteq \overline{A}$*. Agora,* $f(A)$ *é fechado de acordo com a definição considerada, pois* $f(f(A)) = f(A)$ (*axioma* (iii)) *e, por* (ii)*,* $A \subseteq f(A)$*. De onde segue, claramente, que* $f(A)$ *contém a interseção de todos os fechados que contêm* A *e assim,* $f(A)$ *é o fecho de* A*.*

Definição 2.2.7. *Dizemos que um subconjunto* A *de um espaço* S *é* ***denso*** (*em* S) *se* $\overline{A} = S$*.*

Exemplo 2.2.8. 1) *Com a topologia usual, o conjunto os números racionais é denso no conjunto dos números reais.*

2) *Na topologia cofinita, um subconjunto é denso se e somente se é infinito.*

Definição 2.2.9. *Sejam (S,σ) um espaço topológico e $A \subseteq S$. Considere $\mathcal{G} = \{G \in \sigma;\ G \subseteq A\}$, a família de todos os abertos de S que está contido em A. O* ***interior*** *de A é o conjunto*

$$A^\circ = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G.$$

Os pontos de A° são chamados pontos interiores de A.

Notemos que:

$$p \in A^\circ \;\Leftrightarrow\; \exists\, G \in \sigma,\ p \in G:\ G \subseteq A.$$

Proposição 2.2.10. (i) *A° é aberto e $A^\circ \subseteq A$;*

(ii) *A° é o maior aberto de S (com relação a inclusão) contido em A;*

(iii) *$A = A^\circ$ se, e somente se, $A \in \sigma$;*

(iv) *$S^\circ = S$, $\emptyset^\circ = \emptyset$;*

(v) *$(A^\circ)^\circ = A^\circ$;*

(vi) *$(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.*

(vii) *Se $A \subseteq B$ então $A^\circ \subseteq B^\circ$.*

Demonstração. (i) A° é reunião de subconjuntos abertos de A. Assim, A° é aberto e $A^\circ \subseteq A$.

(ii) Se B é um aberto tal que $B \subseteq A$, então

$$B \;\subseteq\; \bigcup_{G \in \sigma;\ G \subseteq A} \;=\; A^\circ.$$

(iii) $A = A^\circ$ implica que A é aberto. Se A é aberto, então é o maior aberto contido em A, logo $A = A^\circ$.

(iv) S e $\emptyset$ são conjuntos abertos.

(v) Como A° é aberto, por (iii), A° coincide com o seu interior.

(vi) O aberto $(A \cap B)^\circ$ é tal que $(A \cap B)^\circ \subseteq A$ e $(A \cap B)^\circ \subseteq B$. Assim, $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ$ e $(A \cap B)^\circ \subseteq B^\circ$, donde $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$. Por outro lado, $A^\circ \cap B^\circ$ é um aberto contido em $A \cap B$. Em consequência, $A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ$. Das duas inclusões, resulta a igualdade $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

(vii) (Exercício). □

Exemplo 2.2.11. 1) *Na reta real, o interior de um conjunto finito é vazio. Também, $\mathbb{N}^\circ = \emptyset$ e $\mathbb{Z}^\circ = \emptyset$. Agora, $[a,b]^\circ =]a,b[$, $[a,b[^\circ =]a,b[$.*

2) *Em $\mathbb{N}$ com a topologia cofinita, um conjunto não vazio tem interior não vazio se, e somente se, ele é aberto.*

Definição 2.2.12. *Sejam (S,σ) um espaço topológico e $A \subseteq S$.*

(1) *Um ponto $a \in A$ é **ponto isolado** em A se $\{a\} \in \sigma_A$. Dizemos que A é um **espaço discreto** quando todo ponto de A é ponto isolado.*

(2) *Um ponto $x \in S$ é **ponto de acumulação** ou ponto limite de A se, para todo $G \in \sigma$, com $x \in G$, tem-se $(G-\{x\}) \cap A \neq \emptyset$.*

(3) *O **conjunto derivado** de A, denotado por A', é o conjunto dos pontos de acumulação de A, isto é, $A' = \{x \in S : x \text{ é ponto acumulação de } A\}$.*

(4) *Um ponto $x \in S$ é chamado **ω - ponto de acumulação** de A ou **ponto ω de acumulação** de A (ω-accumulation point of A) se, para todo $G \in \sigma$, com $x \in G$, tem-se que $G \cap A$ é um conjunto infinito.*

Observação 2.2.13. *i) Se (S,σ) é um espaço topológico com a propriedade de que $\{p\}$ é fechado em S para todo $p \in S$ (os "T_1 espaços" - Definição 6.2.3), em particular se S é de Hausdorff ou metrizável, então*

$$x \in A' \Leftrightarrow x \text{ é um } \omega \text{ - ponto de acumulação de } A\,. \quad (*)$$

Para ver isso, seja $x \in A'$ e suponhamos que exista um aberto G contendo x tal que $G \cap A$ e portanto também $(G-\{x\}) \cap A$ seja finito, digamos $(G-\{x\}) \cap A = \{p_1, p_2, ..., p_r\}$. Como $\{p_i\}^c = S - \{p_i\}$ é um aberto de S contendo x, existe um aberto $V_i \subseteq \{p_i\}^c$, com $x \in V_i$, $i = 1, ..., r$. Tome $V = (V_1 \cap ... \cap V_r) \cap G$. Então $x \in V$ e $(V - \{x\}) \cap A = \emptyset$, o que é uma contradição. A outra implicação é óbvia.

ii) A equivalência $(*)$ acima não ocorre para espaços topológicos gerais. Por exemplo, para o espaço topológico finito $(S = \{1,2,3\}, \tau = \{\emptyset, \{1\}, S\})$ e $A = \{1,3\}$, temos que $2 \in A'$ e, claramente, para o (único) aberto $G = S$, que contém 2, $G \cap A$ não é infinito.

iii) Se $x \in S$ não é ponto de acumulação de A então existe $G \in \sigma$ com $x \in G$ tal que $(G-\{x\}) \cap A = \emptyset$. Assim, se $x \in A$, então $G \cap A = \{x\}$, ou seja, $\{x\} = G \cap A \in \sigma_A$. Portanto, se $x \in A$ não é ponto de acumulação de A, segue que x é ponto isolado. E, claramente, todo ponto $x \in A$ isolado não é ponto de acumulação de A. Assim, se $x \in A \subseteq S$, então x é ponto de acumulação ou ponto isolado de A, não podendo ocorrer as duas coisas.

iv) Se (S,σ) é um espaço finito *em que todo subconjunto unitário é fechado então $\sigma = \mathcal{P}(S)$ e necessariamente, $A' = \emptyset$, para todo subconjunto A de S.*

Exemplo 2.2.14. 1) *Seja $A = \{\frac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\}$ com a topologia induzida da reta real. Então 0 é o único ponto de acumulação de A e todo ponto $p = \frac{1}{n}$ é isolado em A.*

2) *No espaço $(\mathbb{N}, \sigma_{cof})$, se A é finito, A não tem ponto de acumulação e todos os pontos de A são isolados. Se A é infinito, qualquer ponto é ponto de acumulação de A e A não tem pontos isolados.*

Proposição 2.2.15. (i) $\overline{A} = A \cup A'$;

(ii) *A é fechado se, e somente se,* $A' \subseteq A$.

Demonstração. (i) Segue da Proposição 2.2.2, item (iii), que se $x \notin A$ e $x \in \overline{A}$, então:

$$\forall\, G \in \sigma,\ x \in G,\ \text{tem-se}\ \ G \cap (A - \{x\}) = G \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A'.$$

Assim, $\overline{A} \subseteq A \cup A'$. Por outro lado, $A \subseteq \overline{A}$, e, $A' \subseteq \overline{A}$, pois $x \in A'$ se e somente se todo aberto que contém x intersecta $A - \{x\}$, o que implica que todo aberto que contém x tem interseção não vazia com A. Assim $\overline{A} = A \cup A'$.

(ii) É uma consequência imediata de (i). □

Exemplo 2.2.16. *Em* $(\mathbb{R}, \sigma_{usual})$ *tem-se:*

1) *O derivado de qualquer conjunto finito é vazio;*

2) $\mathbb{N}' = \emptyset$;

3) $\mathbb{Z}' = \emptyset$;

4) $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.

Definição 2.2.17. *Sejam* (S, σ) *um espaço topológico e* $A \subseteq S$. *A* ***fronteira*** *de A é o conjunto*

$$Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}.$$

Observação 2.2.18. *Pela definição temos:*

$$x \in Fr(A) \ \Leftrightarrow\ \forall\, G \in \sigma,\ x \in G,\ \textit{tem-se}\ \ G \cap A \neq \emptyset\ \ \textit{e}\ \ G \cap A^c = G \cap (S - A) \neq \emptyset.$$

Proposição 2.2.19. (i) $\overline{A} = A^\circ \cup Fr(A)$;

(ii) *A é fechado se, e somente se,* $Fr(A) \subseteq A$.

Demonstração. (i) Do fato de $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$ e $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c} \subseteq \overline{A}$, segue que $A^\circ \cup Fr(A) \subseteq \overline{A}$. Também, se $x \in \overline{A}$ e $x \notin Fr(A)$, então $x \in \overline{A}$ e $x \notin \overline{A} \cap \overline{A^c}$. Logo $x \notin \overline{A^c}$. Assim, existe $G \in \sigma$, com $x \in G$, tal que $G \cap A^c = \emptyset$, portanto existe $G \in \sigma$ com $x \in G$ tal que $G \subseteq A$, ou seja, $x \in A^\circ$. Desta forma, $\overline{A} \subseteq A^\circ \cup Fr(A)$. Estabelecidas as duas inclusões, tem-se a igualdade.

(ii) É consequência trivial de (i). □

2.2.1 Exercícios

1) Seja $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ o conjunto dos números naturais e $\sigma = \{\emptyset, \mathbb{N}, \{0\}, \{0,1\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}, \ldots\}$. Prove que σ é uma topologia para $\mathbb{N}$. Calcular $\overline{A_n} = \overline{\{0, 1, 2, \ldots, n\}}$, $n \in \mathbb{N}$. Determine os subconjuntos densos de $(\mathbb{N}, \sigma)$.

2) Prove que um subconjunto de um espaço topológico é denso se, e somente se, ele intersecta todo aberto não vazio do espaço.

3) Seja $i : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$ uma aplicação satisfazendo as seguintes propriedades:

   a) $i(S) = S$,

   b) $i(A) \subset A$, $\forall\, A \subseteq S$,

   c) $i(i(A)) = i(A)$, $\forall\, A \subseteq S$,

   d) $i(A \cap B) = i(A) \cap i(B)$, $\forall\, A, B \subseteq S$.

   Seja $\sigma = \{A \subseteq S : i(A) = A\}$. Mostre que σ é uma topologia em S e que nesta topologia $i(A)$ é o interior de A.

4) Verifique que $(A^c)^\circ = (\overline{A})^c$ e $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$.

5) Mostrar que $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$ e dar um exemplo para mostrar que em geral não vale a igualdade $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$.

6) No espaço $(\mathbb{R}, \sigma_{usual})$, calcular:

   a) $\overline{\mathbb{Q}}$, $\mathbb{Q}^\circ$, $Fr(\mathbb{Q})$ e $\mathbb{Q}'$;

   b) $\overline{[0,1]}$, $[0,1]^\circ$, $Fr([0,1])$, $[0,1]'$, $]0,1[^\circ$, $]0,1['$, $[0,1[^\circ$, $Fr(]0,1[)$;

   c) $\overline{A}$, A°, $Fr(A)$ e A', onde $A = \{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots\}$.

7) Mostre que se $A \subseteq B$, então $A' \subseteq B'$.

8) Se $p \geq 2$ é inteiro, um número racional ***p*-ádico**, é um número racional da forma $r = k/(p^n)$, para algum $k \in \mathbb{Z}_+$ e $n \in \mathbb{N}$. Prove que o conjunto dos racionais p-ádicos é denso em [0,1], em particular, o conjunto dos racionais *diádicos* é denso em [0,1]. (Vide Lipschutz [17], Cap. 10, Probl. 14, p. 193.)

9) (Conjunto de Cantor) O ***conjunto de Cantor*** é o que resta do intervalo $[0,1]$ depois da seguinte operação: retira-se primeiramente o terço médio aberto $\left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$ do intervalo $[0,1]$. Retira-se depois o terço médio aberto de cada um dos intervalos restantes, $\left[1, \frac{1}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Sobra então $\left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$. Em seguida, retira-se o terço médio aberto de cada um desses intervalos, e repete-se o processo indefinidamente. O conjunto K dos pontos de $[0,1]$ não retirados é o *conjunto de Cantor*. Com a topologia usual induzida da reta, mostre que:

   a) $\overline{K} = K$.

   b) $K^\circ = \emptyset$.

10) Um subconjunto não vazio A de um espaço topológico S é ***perfeito*** se $A = A'$. Prove que um conjunto é perfeito se, e somente se, é fechado e não tem pontos isolados. Prove que o conjunto de Cantor é perfeito. Mostre todo intervalo fechado $[a,b]$ em $\mathbb{R}$ com a topologia usual é perfeito.

11) Mostre que $Fr(A) = \emptyset$ se, e somente se, A é aberto e fechado.

12) Verificar que, em geral, $A' \neq Fr(A)$ e $Fr(A) \nsubseteq A'$. (*Sugestão*: considere em $(\mathbb{R}, \sigma_{usual})$ o conjunto $A = \{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots\}$ dado no Exercício 6 - c, acima.)

13) Seja (S, σ) um espaço topológico. Dizemos que $A \subseteq S$ é ***denso em lugar nenhum*** ou ***nunca denso*** (*nowhere dense*) se $(\overline{A})^{\circ} = \emptyset$.

    a) Verifique se $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ e o conjunto de Cantor K são subconjuntos nunca densos em $(\mathbb{R}, \sigma_{usual})$.

    b) O conjunto dos números pares é nunca denso em $\mathbb{N}$ com a topologia cofinita?

14) Mostre que:

    a) Um subconjunto fechado X de um espaço S é nunca denso se, e somente se, X^c é denso. Isto é verdadeiro para conjuntos arbitrários? (*Sugestão*: use que $\overline{X^c} = (X^o)^c$. Sobre a pergunta, observe que $\mathbb{Q}^c$ é denso em $\mathbb{R}$.)

    b) Se X é fechado (ou aberto) de um espaço S, então $Fr(X)$ é nunca denso. Esta afirmação é verdadeira de um modo geral? (*Sugestão*: suponhamos X fechado e seja U é um aberto tal que $U \subseteq Fr(X)$, mostre que $U \subseteq Fr(X) \cap X^o = \emptyset$ (vide Exercício 2.8-13 abaixo). Para X aberto, use que X^c é fechado e que $Fr(X) = Fr(X^c)$. Com relação a pergunta anterior, analise $X = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.)

2.3 Sequências em Espaços Topológicos

As sequências desempenham um papel fundamental no estudo os Espaços Métricos. Já na Topologia Geral, as sequências não têm muito interesse: existem espaços topológicos que possuem sequências que convergem para qualquer ponto do espaço, de modo que, nestas condições, o conceito nada acrescenta. Veremos, mais adiante, as propriedades que um espaço deve ter para que, a exemplo dos espaços métricos, as sequências possam ser usadas como uma ferramenta eficiente. Da mesma forma que a noção de espaço topológico estende a noção de espaço métrico, os *filtros* (vide Sims [23]) e as *redes* (vide Kelley [12]) proporcionam duas extensões das sequências para os espaços topológicos.

Definição 2.3.1. *Sejam (S, σ) um espaço topológico e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ uma sequência de pontos de S. Dizemos que a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$* ***converge*** *para x (ou que x é* ***limite da sequência*** *(x_n)) e indicamos $x_n \to x$ ou $x = lim\, x_n$ se, para todo $G \in \sigma$ com $x \in G$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n \in G$.*

Uma sequência em um espaço topológico pode não ter nenhum limite, ter um único limite, ou vários limites, dependendo da topologia.

Exemplo 2.3.2. *Em $\mathbb{R}$ considere $\sigma = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[\ :\ a \in \mathbb{R}\}$. Temos que σ é uma topologia sobre $\mathbb{R}$ e:*

1) *se* $x_n = n$, *então* $x_n \to x$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$*;*

2) *a sequência* $x_n = -n$ *não converge;*

3) *se* $x_n = (-1)^n$, *então* $x_n \to x$, *para todo* $x \leq -1$.

Proposição 2.3.3. *Sejam* (S,σ) *um espaço topológico e* $A \subseteq S$.

(i) *Se* (x_n) *é uma sequência de pontos de* A *e* $x_n \to x$, *então* $x \in \overline{A}$.

(ii) *Se* (x_n) *é uma sequência de pontos dois a dois distintos de* A *e* $x_n \to x$, *então* $x \in A'$.

Demonstração. (i) Como $x_n \to x$, para todo $G \in \sigma$ com $x \in G$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in G$, para todo $n > n_0$. Logo, para todo $G \in \sigma$ com $x \in G$ tem-se $G \cap A \neq \emptyset$. Portanto $x \in \overline{A}$.

(ii) Se a sequência tem os pontos dois a dois distintos, então para todo aberto G, com $x \in G$, $(G - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$, de modo que $x \in A'$. $\square$

Na Seção 2.5 veremos uma recíproca (parcial) do item (i) da proposição anterior.

2.3.1 Exercícios

1) Determine as sequências convergentes de $\mathbb{R}$ com a topologia:

   a) discreta.

   b) caótica (ou indiscreta).

   c) cofinita. (*Sugestão*: analise, separadamente, as sequências (x_n) sem subsequência constante; com uma única subsequência constante (i. é, existe um único elemento $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n = c$, para infinitos n); com duas ou mais subsequências constante. Mostre que que no primeiro caso (x_n) converge para qualquer $x \in \mathbb{R}$, no segundo caso converge apenas para $x = c$ e que no último a sequência não converge.)

   d) coenumerável ($\sigma_{coen} = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq \mathbb{R} : \mathbb{R} - A$ é enumerável$\}$). (*Sugestão*: mostre que $x_n \to p$ $\Leftrightarrow$ (x_n) é estacionária em p.)

2) Se $\mathbb{N}$ tem a topologia $\sigma = \{\emptyset, \mathbb{N}, \{0\}, \{0,1\}, \{0,1,2\}, \ldots\}$, determine as sequências convergentes de $(\mathbb{N}, \sigma)$.

2.4 Bases e Sub-bases

Nos espaços métricos as bolas abertas desempenham um papel fundamental: a partir delas define-se os conjuntos abertos e, a partir daí, a topologia do espaço métrico. As bolas abertas constituem uma "*base*" para a topologia do espaço métrico, no sentido que qualquer aberto é uma reunião de bolas abertas. Vejamos o conceito de base para espaços topológicos.

Definição 2.4.1. (Base) *Seja* (S,σ) *um espaço topológico. Uma família* $\mathfrak{B}$ *de abertos de* S *é uma* ***base*** *para* σ *se todo elemento de* σ *é uma reunião de elementos de uma subfamília de* $\mathfrak{B}$*. Os elementos de* $\mathfrak{B}$ *são chamados* ***abertos básicos****. Mais precisamente, dado* $G \in \sigma$*, existe* $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$ *tal que* $G = \bigcup_{\mathrm{B}\in\mathfrak{B}'} \mathrm{B}$.

Exemplo 2.4.2. 1) *A família das bolas abertas de um espaço métrico é uma base para sua topologia usual (induzida da métrica).*

2) *Para* $S = \{1,2,3\}$ *com* $\sigma = \mathcal{P}(S)$ *então* $\mathfrak{B} = \{\{1\},\ \{2\},\ \{3\}\}$ *é uma base para* σ.

Observação 2.4.3. *Se* $\mathfrak{B}$ *é uma base para uma topologia* σ *de* S *então qualquer família de conjuntos abertos que contém* $\mathfrak{B}$ *é também base para* σ.

Proposição 2.4.4. *Sejam* (S,σ) *um espaço topológico e* $\mathfrak{B} \subseteq \sigma$*.* $\mathfrak{B}$ *é base de* σ *se, e somente se, para todo* $G \in \sigma$ *com* $x \in G$*, existe* $B \in \mathfrak{B}$ *tal que* $x \in B \subseteq G$.

Demonstração. $\mathfrak{B}$ é base para σ se, e somente se, para todo $G \in \sigma$, $G = \bigcup_{\lambda\in L} B_\lambda$, $B_\lambda \in \mathfrak{B}$, ou equivalentemente, para todo $G \in \sigma$, qualquer que seja $x \in G$, existe $B \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B \subseteq G$. □

Observação 2.4.5. *Uma pergunta natural que surge é:*

Dado $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(S)$*, existe uma topologia* σ *para* S *que tem* $\mathfrak{B}$ *como base?*

Isto é em geral falso, pois, por exemplo, se $S = \{1,2,3\}$ *e* $\mathfrak{B} = \{\{1\},\ \{2\}\}$*,* $\mathfrak{B}$ *não é base para uma topologia sobre* S *porque* $S \neq \bigcup_{\mathrm{B}\in\mathfrak{B}} \mathrm{B}$*. Também, para* $S = \mathbb{R}$ *e*

$$\mathfrak{B} = \{\ ]-\infty,b[\ ,\ ]a,+\infty[\ :\ a,b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}),$$

se $\mathfrak{B}$ *fosse uma base de uma topologia* σ *em* $\mathbb{R}$*, então para* $a < b$*,* $]a,b[\ =]-\infty,b[\cap]a,+\infty[\in \sigma$ *e portanto seria reunião de elementos de* $\mathfrak{B}$*, o que é um absurdo.*

A proposição seguinte nos dá uma condição para que $\mathfrak{B}$ seja base de uma topologia para S.

Proposição 2.4.6. *Seja* $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(S)$*,* $S \neq \emptyset$*. Então* $\mathfrak{B}$ *é base para uma topologia em* S *se, e somente se, satisfaz as seguintes condições:*

(i) $S = \bigcup_{B\in\mathfrak{B}} B$ *(i. é,* $\forall x \in S,\ \exists B \in \mathfrak{B}\ :\ x \in \mathfrak{B}$*);*

(ii) *Para todos* $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$*,* $B_1 \cap B_2$ *é reunião de membros de* $\mathfrak{B}$*, ou equivalentemente, se* $p \in B_1 \cap B_2$*, então existe* $B_3 \in \mathfrak{B}$ *tal que* $p \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) É deixada como exercício.

($\Leftarrow$) Seja $\mathfrak{B}$ uma família de subconjuntos de S, satisfazendo (i) e (ii). Considere σ o conjunto de todos os subconjuntos de S que são reuniões de membros de $\mathfrak{B}$. Então σ é uma topologia em S. De fato, tem-se :

(1) $S \in \sigma$ por (i). Também, $\emptyset = (\bigcup_{B\in\ \emptyset\subseteq\ \mathfrak{B}} B) \in \sigma$.

(2) Sejam $G_1, G_2 \in \sigma$. Então G_1 e G_2 são reuniões de membros de $\mathfrak{B}$, isto é, $G_1 = \bigcup_{i \in I} B_{1,i}$, $G_2 = \bigcup_{j \in J} B_{2,j}$. Assim, pelas leis distributivas,

$$G_1 \cap G_2 = \left(\bigcup_i B_{1,i} \right) \cap \left(\bigcup_j B_{2,j} \right) = \bigcup_{i,j} (B_{1,i} \cap B_{2,j}).$$

Por (ii), $B_{i,1} \cap B_{2,j}$ é reunião de membros de $\mathfrak{B}$ e portanto, $G_1 \cap G_2$ pertence a σ.

(3) Seja $\{G_i\}$ uma família de membros de σ. Por definição de σ, todo G_i é reunião de membros de $\mathfrak{B}$, logo $\bigcup_i G_i$ é também reunião de membros de $\mathfrak{B}$ e portanto pertence a σ. □

Definição 2.4.7. *A topologia σ, obtida a partir de $\mathfrak{B}$ como na proposição anterior, é chamada **topologia gerada** por $\mathfrak{B}$.*

Exemplo 2.4.8. (Topologia produto para dois espaços topológicos) *Sejam $(S_1, \sigma_1), (S_2, \sigma_2)$ espaços topológicos. Então,*

$$\mathfrak{B} = \{G_1 \times G_2 : \ G_1 \in \sigma_1, \ G_2 \in \sigma_2\}$$

*é base para uma topologia em $S_1 \times S_2$. Tal topologia é denominada **topologia produto** para $S_1 \times S_2$. Por simplicidade denotaremos essa topologia por σ_{prod} ou $\sigma = \sigma_1 \times \sigma_2$. Note que, em geral, o conjunto $\{G_1 \times G_2 : \ G_1 \in \sigma_1, \ G_2 \in \sigma_2\}$ não é uma topologia para $S_1 \times S_2$ (Exemplifique!).*

Mais geralmente, pode-se definir a topologia produto para qualquer produto finito $S_1 \times \cdots \times S_n$ de espaços topológicos $(S_1, \sigma_1), \ldots, (S_n, \sigma_n)$, a partir de $\mathfrak{B} = \{G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n : \ G_i \in \sigma_i, \ i = 1, \ldots n\}$.

Observação 2.4.9. *i) A proposição anterior nos diz que a definição de base apresentada aqui é equivalente à dada em Munkres [20] (Cap. 2, §13, p. 78).*

ii) Dados $(M_1, d_1), \ldots, (M_n, d_n)$ espaços métricos, usando a métrica D_2 do máximo no espaço produto $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ é fácil ver que para $x = (x_1, \ldots, x_n) \in M$,

$$B_{D_2}(x, \varepsilon) = B_{d_1}(x_1, \varepsilon) \times \cdots \times B_{d_n}(x_n, \varepsilon) \qquad (1).$$

Denotemos por σ_i a topologia em M_i induzida pela métricas d_i, $i = 1, \ldots, n$, respectivamente. Seja σ_{D_2} a métrica em M induzida por D_2 e σ_{prod} a topologia produto em M. Da igualdade (1) segue facilmente que a topologia produto em M coincide com a topologia induzida por D_2, isto é, $\sigma_{prod} = \sigma_{D_2}$ (e consequentemente, a topologia em M obtida por qualquer uma das 3 métricas equivalentes D, D_1, D_2 coincide com a topologia produto).

Apresentamos a seguir a definição de *sub-base*. A noção de sub-base aparece, proporcionando uma topologia (a menor topologia) que contém uma dada família de subconjuntos de S. O conceito é importante, pois veremos que muitas propriedades que teriam que ser verificadas por todos os abertos do espaço, ficam estabelecidas quando os abertos de uma sub-base para a topologia as verificam. Isto introduz uma boa simplificação, pois, de um modo prático, os abertos da sub-base têm uma forma mais simples que um aberto qualquer do espaço. Sua importância ficará aparente nos capítulos de continuidade e compacidade.

Definição 2.4.10. (Sub-base) *Seja* (S,σ) *um espaço topológico. Uma* ***sub-base*** *para* σ *é uma família* $\mathfrak{S}$ *de abertos de* S *cujo conjunto* $\mathfrak{B}$ *das interseções finitas de elementos de* $\mathfrak{S}$ *forma uma base para* σ*. A base* $\mathfrak{B}$ *é denominada* ***base gerada*** *pela sub-base* $\mathfrak{S}$ *e os abertos da sub-base são chamados* ***abertos sub-básicos****. Diz-se também que a topologia* σ *é* ***gerada*** *pela sub-base* $\mathfrak{S}$*.*

Observação 2.4.11. *Seja* S *um conjunto não vazio. Claramente, qualquer família* $\mathfrak{S}$ *de subconjuntos de* S *cuja reunião é igual a* S *dá origem a uma topologia* σ *para* S (*dada pela reunião de todas as interseções finitas de elementos de* $\mathfrak{S}$ *- ou seja que tem o subconjunto* $\mathfrak{B}$ *de todas as interseções finitas de elemento de* $\mathfrak{S}$ *como base*)*. Tal topologia tem* $\mathfrak{S}$ *como sub-base, de modo que a definição acima está de acordo com a definição de sub-base apresentada em Munkres [20]* (*Cap*. 2, §13, *p*. 82)*. O conjunto* $\mathfrak{B}$ *de todas as interseções finitas de elemento de* $\mathfrak{S}$ *será uma base para a topologia* σ*.*

Exemplo 2.4.12. 1) *A família dos intervalos infinitos de* $\mathbb{R}$, $]-\infty,a[,\quad]b,+\infty[,\quad a,b\in\mathbb{R}$, *é uma sub-base para a topologia usual de* $\mathbb{R}$*.*

2) *Sejam* $(S_1,\sigma_1),\ldots,(S_n,\sigma_n)$ *espaços topológicos. Então,*

$$\mathfrak{S}=\{G_1\times S_2\times\cdots\times S_n : G_1\in\sigma_1\}\cup\cdots\cup\{S_1\times\cdots\times S_{n-1}\times G_n : G_n\in\sigma_n\}$$

é uma sub-base para a topologia produto em $S=S_1\times S_2\times\ldots\times S_n$*.*

2.4.1 Exercícios

1) Sejam $\mathfrak{B}_1=\{\,]a,b[\,:\ a,\ b\ \in\mathbb{R},\ a<b\}$ e $\mathfrak{B}_2=\{\,[a,b[\,:\ a,\ b\in\mathbb{R}, a<b\}$. Mostre que $\mathfrak{B}_1$ e $\mathfrak{B}_2$ são bases para topologias em $\mathbb{R}$. A topologia em $\mathbb{R}$ que tem $\mathfrak{B}_2$ como base é denominada ***topologia do limite inferior*** (*lower limit topology*) . O espaço $\mathbb{R}$ com tal topologia é conhecido como ***reta de Sorgenfrey*** (devido ao matemático americano Robert Sorgenfrey). Note que as topologias dadas por essas duas bases são, respectivamente, a usual e a referida no Exercício 2.1.3 - 6.

2) Considere em $\mathbb{R}^2$ com a topologia induzida pela métrica euclidiana $d(x,y) = = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$. Seja $\mathfrak{B}$ a família dos retângulos abertos de lados paralelos ao eixos em $\mathbb{R}^2$. Prove que $\mathfrak{B}$ é base para a topologia usual do plano.

3) Seja $K=\{1/n : n\in\mathbb{N}^*\}$. Dados $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ considere o conjunto $]a,b[-K$, de todos os elementos em $]a,b[$ que não estão em K.

a) Mostre que $\mathfrak{B}=\{]a,b[-K :\ a,b\in\mathbb{R},\ a<b\}$ forma uma base para $\mathbb{R}$. A topologia em R assim obtida é as vezes referida como ***K−topologia*** em $\mathbb{R}$ e denota-se $\mathbb{R}_K$ para indicar que estamos considerando $\mathbb{R}$ com esta topologia.

b) Mostre que a $K-$ topologia (τ_K) é mais fina que a topologia usual (τ_{usual}) em $\mathbb{R}$ e que a $K-$ topologia e a topologia do limite inferior (τ_l) não são comparáveis. (*Sugestão*: $[0,1[\ \in \tau_l$, mas $[0,1[\ \notin \tau_K$; $]-\frac{1}{2},1[-K\ \in \tau_K$, porém $]-\frac{1}{2},1[-K\ \notin\ \tau_l$.)

2.5 Sistemas de Vizinhanças/Base Local e Axiomas de Enumerabilidade

Para um estudo de algumas propriedades topológicas em um ponto de um espaço topológico só interessam aqueles abertos que contém o ponto. Assim, da mesma forma que na seção anterior, considera-se os sistemas de vizinhanças desse ponto (ou base para o conjunto das vizinhanças).

Definição 2.5.1. *Sejam (S,σ) um espaço topológico e $p \in S$. Um subconjunto V de S é uma* ***vizinhança*** *de p se $p \in V^\circ$.*

Definição 2.5.2. *Uma família $\mathfrak{B}_p$ de vizinhanças de p é chamada uma* ***base para o sistema de vizinhanças*** *de p, ou uma* ***base local*** *em p, se qualquer vizinhança de p contém um elemento desta família.*

Observação 2.5.3. *i) Seja (S,σ) um espaço topológico. Todo ponto $p \in S$ possui pelo menos uma base local, a saber $\mathfrak{B}_p = \{G \in \sigma : p \in G\}$.*

ii) Se $\mathfrak{B}_p$ é uma base local em p, então $\mathfrak{B}_p^o = \{B^\circ :\ B \in \mathfrak{B}_p\}$ é também uma base local em p, além disso $\mathfrak{B}_p^o$ é formada por elementos da topologia σ. Em função disso podemos supor, na definição, que a base local $\mathfrak{B}_p$ em p seja tal que $\mathfrak{B}_p \subseteq \sigma$, isto é, que os elementos de $\mathfrak{B}_p$ sejam abertos.

iii) Alguns autores, definem vizinhança de um ponto p como um subconjunto aberto que contém p.

Exemplo 2.5.4. *Num espaço métrico (M,d), $\mathfrak{B}_p = \{B_d(p,\varepsilon) :\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\}$ é uma base local. Também $\mathfrak{B}'_p = \{B_d(p,r); r \in \mathbb{Q}_+^*\}$ é uma base local em p.*

Definição 2.5.5. *Dizemos que um espaço topológico (S,σ) satisfaz o* ***primeiro axioma de enumerabilidade****, ou é* ***e_1 espaço****, se todo ponto de S tem uma base local enumerável.*

Exemplo 2.5.6. 1) $(\mathbb{R},\sigma_{usual})$ *é e_1.*

2) *Mais geralmente, todo espaço espaço métrico (espaço topológico metrizável) é e_1. Para cada p no espaço tome $\mathfrak{B}_p = \{B(p,1/n), n \in \mathbb{N}^*\}$, ou $\mathfrak{B}'_p$ como no Exemplo 2.5.4.*

3) *Todo espaço topológico finito é e_1.*

4) *Para todo $S \neq \emptyset$, (S,σ_{disc}) e (S,σ_{cao}) são e_1 espaços.*

5) $(\mathbb{R},\sigma_{cof})$ *não é e_1. (Verifique! Sugestão: suponha que exista $\mathfrak{B}_p$ base local enumerável em p; $\mathfrak{B}_p = \{B_1,B_2,...\}$, com $B_i = \mathbb{R} - F_i$, F_i finito. Tome $q \in \mathbb{R} - [(\bigcup_i F_i)\bigcup\{p\}]$ e analise o que ocorre com $G = \mathbb{R} - \{q\}$).*

Lema 2.5.7 (Base Local Encaixada). *Sejam* (S,σ) *um espaço topológico* e_1, $p \in S$ *e* $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, \ldots\}$ *uma base local enumerável em* p. *Então existe uma base local em* p, $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \ldots\}$, *tal que* $U_1 \supseteq U_2 \supseteq U_3 \supseteq \cdots$, *e* $U_i \subseteq V_i$, *para todo* $i = 1, 2, \ldots$ *Neste caso dizemos que* $\mathcal{U}$ *é uma base local* (*em* p) ***encaixada***.

Demonstração. Definimos a base local $\mathcal{U}$ por recorrência: tome $U_1 := V_1$ e defina $U_n := U_{n-1} \cap V_n$, para todo $n \geq 2$. Deste modo, temos $U_{i+1} \subseteq U_i$ e $U_i \subseteq V_i$, para todo $i \geq 1$. Além disso, $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ é uma base local em p. De fato, dado $G \in \sigma$ com $p \in G$, como $\mathcal{V}$ é base local em p, existe $V_k \in \mathcal{V}$ tal que $p \in V_k \subseteq G$. Daí, $U_k = U_{k-1} \cap V_k \subseteq V_k \subseteq G$, com $p \in U_k \in \mathcal{U}$. O que conclui a prova. $\square$

Proposição 2.5.8. *Sejam* (S,σ) *um* e_1 *espaço e* $A \subseteq S$. *Então,* $x \in \overline{A}$ *se, e somente se, existe uma sequência* (x_n) *de pontos de* A *tal que* $x_n \to x$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $x \in \overline{A}$. Como S é e_1, pelo Lema 2.5.7, existe uma base local em x (enumerável) encaixada, digamos $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}^*\}$. Como $x \in \overline{A}$, todo $G \in \sigma$ com $x \in G$, temos $G \cap A \neq \emptyset$, logo, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, temos $U_n \cap A \neq \emptyset$. Agora, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, escolha $x_n \in U_n \cap A$. A sequência (x_n) é formada por elementos de A. Mostremos que $x_n \to x$. De fato, dado $G \in \sigma$ com $x \in G$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $x \in U_{n_0} \subseteq G$. Então, para todo $n \geq n_0$, $x_n \in U_n \subseteq U_{n_0} \subseteq G$. Portanto $x_n \to x$.

($\Leftarrow$) Vale para qualquer espaço topológico (ver Proposição 2.3.3). $\square$

Como todo espaço métrico é e_1, tem-se:

Corolário 2.5.9. *Em um espaço métrico* M, *dado* $A \subseteq M$, $x \in \overline{A}$ *se, e somente se, existe uma sequência* (x_n) *de pontos de* A *tal que* $x_n \to x$.

Observação 2.5.10. *i*) *Se um espaço topológico* (S,σ) *não for* e_1, *não vale, em geral, que se* $x \in \overline{A}$ ($A \subseteq S$), *então existe uma sequência de pontos de* A *convergindo para* x. *Por exemplo, considere o espaço* $(\mathbb{R}, \sigma_{coen})$, *onde* $\sigma_{coen} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{G \subseteq \mathbb{R} : G^c$ *é enumerável*$\}$. *Temos que* $(\mathbb{R}, \sigma_{coen})$ *não é* e_1 (*verifique!*). *Os conjuntos fechados são* $\emptyset$, $\mathbb{R}$ *e* $F \subseteq \mathbb{R}$ *com* F *enumerável. Considere* $A = [0,1] \subset \mathbb{R}$. *Então o menor fechado que contém* A *é* $\mathbb{R}$ (*o único*). *Logo,* $\overline{A} = \mathbb{R}$. *Deste modo,* $2 \in \overline{A}$, *mas não existe sequência de pontos de* A *que converge para* 2, *pois se existisse, deveria haver* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *tal que* $x_n = 2$, *para todo* $n \geq n_0$, *o que não ocorre, pois* $2 \notin A$ (*lembre-se que as sequências convergentes em* $(\mathbb{R}, \sigma_{coen})$ *são as estacionárias*).

ii) *No Cap. 6, Exercício 6.2.1 - 6, é apresentada uma condição necessária e suficiente, em termos de sequência, para que* x *pertença a* A' (*com* $A \subseteq S$, S *espaço topológico*).

Definição 2.5.11. *Dizemos que um espaço topológico* (S,σ) *satisfaz o* ***segundo axioma de enumerabilidade*** *ou que* (S,σ) *é* ***e_2 espaço*** *se existe uma base enumerável para a topologia* σ *de* S.

Exemplo 2.5.12. 1) $(\mathbb{R}, \sigma_{usual})$ *é* e_2.

2) (S,σ_{dis}) *é* e_2 *se, e somente se,* S *é enumerável. Em particular,* $(\mathbb{R},\sigma_{dis})$ *(ou, equivalentemente, o espaço métrico* $\mathbb{R}$ *com a métrica* d_{01}*) não é* e_2*.*

3) $(\mathbb{R},\sigma_{cof})$ *não é* e_2*.*

Proposição 2.5.13. *Se* (S,σ) *é* e_2 *então* (S,σ) *é* e_1*.*

Demonstração. Se $\mathfrak{B} = \{B_1, B_2, \ldots\}$ é base enumerável para σ, então dado $p \in S$, o conjunto dos abertos básicos que contêm p constitui uma base local enumerável em p. Assim (S,σ) é e_1. □

Observação 2.5.14. *i) Ser* e_1 *não implica em* e_2*. Por exemplo,* $(\mathbb{R},\sigma_{dis})$ *é* e_1 *mas não é* e_2*.*

ii) Também ser métrico não implica em ser e_2 *espaço, como vimos no exemplo anterior, item* 2*.*

2.6 Espaços Separável e de Lindelof

Definição 2.6.1. *Dizemos que um espaço topológico* (S,σ) *é* ***separável*** *se ele tem um subconjunto enumerável* D *denso em* S *(*$\overline{D} = S$*).*

Exemplo 2.6.2. 1) *Um espaço topológico enumerável é separável.*

2) $(\mathbb{R},\sigma_{usual})$ *é separável, pois* $\mathbb{Q}$ *é enumerável e denso em* $\mathbb{R}$*.*

3) $(\mathbb{R},\sigma_{dis})$ *não é separável.*

Proposição 2.6.3. *Todo espaço topológico* e_2 *é separável.*

Demonstração. Sejam (S,σ) um espaço topológico e $\{B_n\}_{n\in J}$ uma base enumerável de S. Para cada $n \in J$, tomemos $x_n \in B_n$. Então o conjunto $D = \{x_n \in S : n \in J\}$ é denso em S, pois se $x \in S$ e G é um aberto contendo x, então existe um aberto básico B_n tal que $x \in B_n \subseteq G$ (Proposição 2.4.4), de modo que $G \cap D \neq \emptyset$, já que $x_n \in G \cap D$, e em consequência, $x \in \overline{D}$. □

Observação 2.6.4. *A recíproca da proposição anterior em geral não é válida, isto é, ser separável não implica em ser* e_2 *(vide Munkres [20], Cap. 4, §30, Exemplo 3, p. 192). Em espaços métricos a recíproca é verdadeira, como mostra o resultado seguinte.*

Proposição 2.6.5. *Todo espaço métrico separável é* e_2*.*

Demonstração. Seja (M,d) um espaço métrico separável. Então, existe $D = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \subseteq M$ denso enumerável. Considere $\mathfrak{B} = \{B(x_i, r) : r \in \mathbb{Q}_+^*,\ x_i \in D\}$. $\mathfrak{B}$ é enumerável e é uma base para a topologia σ de M induzida pela métrica d. De fato, dado $G \in \sigma$, para todo $p \in G$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(p,\varepsilon) \subseteq G$. Como D é denso em M, temos $B(p,\varepsilon/3) \cap D \neq \emptyset$, assim, existe $x_i \in D$ tal que $d(p,x_i) < \varepsilon/3$. Seja $r \in \mathbb{Q}$ com $\varepsilon/3 < r < 2\varepsilon/3$. Então $B(x_i,r) \subseteq B(p,\varepsilon)$, pois, para todo $y \in B(x_i,r)$, $d(p,y) \le d(p,x_i) + d(x_i,y) < \varepsilon/3 + 2\varepsilon/3 = \varepsilon$, e $p \in B(x_i,r)$, uma vez que $d(p,x_i) < \varepsilon/3 < r$. Assim, dado $G \in \sigma$ e $p \in G$, mostramos que existe $B(x_i,r) \in \mathfrak{B}$ tal que $p \in B(x_i,r) \subseteq G$, isto é, $\mathfrak{B}$ é uma base enumerável para σ. □

O resultado seguinte é consequência das duas proposições anteriores.

Corolário 2.6.6. *Um espaço métrico é e_2 se, e somente se, é separável.*

Introduziremos agora os conceitos de cobertura, subcobertura e espaço de Lindelöf.

Definição 2.6.7. *Uma família $\{A_\lambda\}_{\lambda\in L}$ de subconjuntos de S é uma **cobertura** de $X \subseteq S$ se $X \subseteq \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$. A cobertura é **finita** se L é finito, **enumerável** se L é enumerável e é aberta se todos os subconjuntos A_λ são abertos em S. Se $\{A_\lambda\}$ é uma cobertura de X, uma **subcobertura** de $\{A_\lambda\}$ é uma subfamília de $\{A_\lambda\}$ que também cobre X.*

Definição 2.6.8. *Um espaço topológico (S,σ) é denominado espaço de **Lindelöf** quando toda cobertura aberta de S admite uma subcobertura enumerável.*

Exemplo 2.6.9. 1) *(S,σ_{cao}) é de Lindelöf (e também separável), para todo $S \neq \emptyset$.*

2) *$(\mathbb{R},\sigma_{cof})$ é um espaço de Lindelöf.*

Proposição 2.6.10 (Teorema de Lindelöf)**.** *Sejam (S,σ) um espaço topológico e G um subconjunto aberto e não vazio de S. Se (S,σ) é e_2, então toda cobertura aberta de G admite uma subcobertura enumerável, em particular, S é um espaço de Lindelof.*

Demonstração. Sejam $\mathfrak{B} = \{B_1,B_2,B_3,\ldots\}$ uma base enumerável para σ e $\{G_i\}_{i\in I}$ uma cobertura aberta para G (não necessariamente enumerável), i. é, $G = \bigcup_{i\in I} G_i$, $G_i \in \sigma$. Seja $\mathcal{N} = \{n \in \mathbb{N}^* : B_n \subseteq G_i$, para algum $i \in I\}$. Para cada $n \in \mathcal{N}$ escolha um G_{i_n} tal que $B_n \subseteq G_{i_n}$. Então $G = \bigcup_{n\in\mathcal{N}} G_{i_n}$ (cobertura enumerável) , pois se $x \in G$ então $x \in G_i$, para algum i. Pela Proposição 2.4.4, existe $B_m \in \mathcal{N}$ de modo que $x \in B_m \subseteq G_i$. Logo $m \in \mathcal{N}$ e pela escolha dos G_{i_m}, $x \in B_m \subseteq G_{i_m} \subseteq \bigcup_{n\in\mathcal{N}} G_{i_n}$, o que completa a prova. □

Proposição 2.6.11. *Seja (S,σ) um espaço e_2. Então qualquer base de S contém uma subfamília enumerável que é também uma base para a topologia de S.*

Demonstração. Sejam $\{B_n\}_{n\in I\subseteq\mathbb{N}^*}$ uma base enumerável para σ e $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma base qualquer para σ. Dado que $B_n = \bigcup_{\lambda\in\Lambda'_n} C_\lambda$, $\Lambda'_n \subseteq \Lambda$, para cada $n \in I$, segue do Teorema de Lindelöf, que $B_n = \bigcup_{\lambda_i\in\Lambda_n} C_{\lambda_i}$, com Λ_n enumerável, $\Lambda_n \subseteq \Lambda'_n$. Então, $\{C_{\lambda_i} : \lambda_i \in \Lambda_n, n \in I\}$ é enumerável e constitui uma base para a topologia σ de S. □

Proposição 2.6.12. *Subespaço fechado de um espaço de Lindelöf é um espaço de Lindelöf.*

Demonstração. Sejam (S,σ) um espaço de Lindelöf e $F \subseteq S$ um subconjunto fechado. Mostremos que (F,σ_F) é espaço de Lindelöf. De fato, se $F = \bigcup_{\lambda\in L} G_\lambda$ é uma cobertura aberta em (F,σ_F), então, como cada G_λ é aberto em F, existe $U_\lambda \in \sigma$ tal que $G_\lambda = U_\lambda \cap F$. Assim,

$$F = \bigcup_{\lambda\in L} G_\lambda = \bigcup_{\lambda\in L} (U_\lambda \cap F) = \left(\bigcup_{\lambda\in L} U_\lambda\right) \cap F.$$

Logo $S = (\bigcup_{\lambda \in L} U_\lambda) \cup F^c$ é uma cobertura aberta de S. Como S é de Lindelöf, tal cobertura admite subcobertura enumerável, digamos $S = (\bigcup_{i \in J} U_{\lambda_i}) \cup F^c$, com J enumerável. Deste modo, $F \subseteq \bigcup_{i \in J} U_{\lambda_i}$, donde segue que $F = \bigcup_{i \in J} G_{\lambda_i}$ (cobertura enumerável), e portanto F é de Lindelöf. □

Proposição 2.6.13. *Num espaço métrico M, as três condições são equivalentes:*

(i) *M é e_2 espaço.*

(ii) *M é um espaço de Lindelof.*

(iii) *M é separável.*

Demonstração. Falta provar apenas que (ii) $\Rightarrow$ (iii). Para cada $m \in \mathbb{N}^*$, considere a cobertura de M por bolas abertas $\mathcal{C} = \{B(x, 1/m),\ x \in M\}$ de M. Como M é Lindelof, existe uma subcobertura enumerável $\mathcal{C}' = \{B_{m1}, B_{m2}, ...\}$ de M, onde $B_{mk} = B(x_{mk}, 1/m)$. Tome $X = \{x_{mk};\ m,k \in \mathbb{N}^*\}$. X é enumerável e $\overline{X} = M$. Assim M é separável. □

2.7 Propriedades Hereditárias e Transferíveis para o Produto

Definição 2.7.1. *Uma propriedade é denominada* ***hereditária*** *se todo subespaço topológico de um espaço que verifica a propriedade, também a verifica, isto é, se (S, σ) tem a propriedade P e $A \subseteq S$, então (A, σ_A) também satisfaz a propriedade P.*

Definição 2.7.2. *Dizemos que uma propriedade é* ***transferível para o produto*** *cartesiano se, o produto cartesiano de espaços topológicos que satisfazem a propriedade, também verifica a propriedade.*

Exemplo 2.7.3. *Metrizabilidade é uma propriedade hereditária e é uma propriedade que se transfere para o produto finito.*

Mostremos a hereditariedade. Seja (S, σ) um espaço metrizável (assim, existe uma métrica d tal que $\sigma = \sigma_d$ e todo aberto de S é reunião de bolas abertas). Dado $A \subseteq S$, queremos mostrar que o subespaço (A, σ_A) é metrizável, ou equivalentemente, que todo aberto de A é reunião de bolas abertas em A. Temos que $U \in \sigma_A$ se, e somente se, existe $G \in \sigma$ tal que $U = G \cap A$. Logo, $G = \bigcup_{x \in G} B(x, \varepsilon_x)$, pois (S, σ) é metrizável. Assim, $U = (\bigcup_{x \in G} B(x, \varepsilon_x)) \cap A = \bigcup_{x \in G} (B(x, \varepsilon_x) \cap A)$, de modo que U é aberto em A se, e somente se, U é aberto na topologia de A como subespaço métrico de S.

Que a propriedade se transfere para o produto finito, isto é, se $(M_1, \sigma_1), \ldots, (M_n, \sigma_n)$ são espaços metrizáveis (em que σ_i é a topologia proveniente de uma métrica d_i, $i = 1, \ldots, n$) então $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ com σ_{prod} é metrizável, segue do fato que $\sigma_{prod} = \sigma_{D_2}$ (a topologia produto coincide com a topologia induzida pela métrica do máximo em M, e portanto pelas outras métricas D e D_1 equivalente a D_2) como já mencionado na Observação 2.4.9 - ii.

Exemplo 2.7.4. *O primeiro e o segundo axioma de enumerabilidade são propriedades hereditárias e também se transferem para o produto finito. (Exercício 2.8 - 32.)*

A propriedade de ser Lindelöf não é hereditária como ilustrado no exemplo/contraexemplo seguinte. Observamos, entretanto, que subespaços fechados de um espaço de Lindelöf é de Lindelöf, como vimos na Proposição 2.6.12.

Exemplo 2.7.5. *Considere* $\sigma = \{G \subseteq \mathbb{R} : 0 \notin G \text{ ou } \mathbb{R} - \{1,2\} \subseteq G\}$. σ *é uma topologia em* $\mathbb{R}$ *e* $(\mathbb{R},\sigma)$ *é um espaço de Lindelöf. O subespaço* $\mathbb{R} - \{0\}$ *com a topologia induzida não é de Lindelöf, pois a cobertura aberta* $\{\{r\} : r \in \mathbb{R} - \{0\}\}$ *não admite subcobertura enumerável.*

A propriedade de ser um espaço de Lindelöf também não é transferível para o produto. Um exemplo desse fato é dado a seguir e serve também para mostrar que a separabilidade não é uma propriedade hereditária.

Exemplo 2.7.6. *Seja* $(\mathbb{R},\sigma)$, *onde* σ *é a topologia em* $\mathbb{R}$ *gerada pelos intervalos* $[a,b[,\ a,b \in \mathbb{R}$ (*topologia do limite inferior - Exercício 2.4.1 - 1*). *Então:*

1) $(\mathbb{R},\sigma)$ *é separável.*

2) $(\mathbb{R},\sigma)$ *é um espaço de Lindelöf.*

3) $(\mathbb{R}^2, \sigma_{prod} = \sigma \times \sigma)$ *não é um espaço de Lindelöf.*

4) $(\mathbb{R}^2, \sigma_{prod})$ *é separável, mas* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ *não é separável.*

Com efeito: 1) $(\mathbb{R},\sigma)$ *é separável, pois o conjunto dos números racionais* $\mathbb{Q}$ *é enumerável e denso em* $\mathbb{R}$ *com essa topologia.*

2) *É suficiente mostrar que toda cobertura de* $\mathbb{R}$ *por elementos básicos admite uma subcobertura enumerável.* (*Exercício !*) *Seja* $\mathcal{C} = \{\ [a_\lambda, b_\lambda[\ \}_{\lambda \in L}$ *uma coleção de abertos em* σ *tal que* $\mathbb{R} = \bigcup_{\lambda \in L}[a_\lambda, b_\lambda[$. *Queremos encontrar uma subcoleção enumerável de* $\mathcal{A}$ *que também cobre* $\mathbb{R}$. *Considere o subconjunto de* $\mathbb{R}$, $W := \bigcup_{\lambda \in L}\ ]a_\lambda, b_\lambda[$. *Afirmamos que* $\mathbb{R} - W$ *é um subconjunto enumerável. De fato, seja* $x \in \mathbb{R} - W$. *Então* $x \notin\ ]a_\lambda, b_\lambda[$, *para todo* $\lambda \in L$ (*já que* $x \notin W$). *Logo devemos ter* $x = a_{\lambda_0}$, *para algum* $\lambda_0 \in L$. *Escolha* $q_x \in \mathbb{Q}$, *com* $q_x \in\ ]a_{\lambda_0}, b_{\lambda_0}[\ \subseteq W$. *Temos assim uma função de* $\mathbb{R} - W$ *em* $\mathbb{Q}$, $x \mapsto q_x$, *e essa função é injetora, pois se* $x, y \in \mathbb{R} - W$, *com* $x < y$, *então* $q_x < q_y$ (*caso contrário, teríamos* $x < y < q_y < q_x$, *e assim* $y \in W$). *Logo* $\mathbb{R} - W$ *é enumerável. Portanto existe uma subfamília enumerável* $\mathcal{C}'$ *de* $\mathcal{C}$ *que cobre* $\mathbb{R} - W$. *Mostremos que existe também uma subfamília enumerável de* $\mathcal{C}$ *que cobre* W. *Com efeito, considere agora* $\mathbb{R}$ *com a topologia* σ_{usual}, *com essa topologia,* W *é um aberto de* $\mathbb{R}$. *Pelo Teorema de Lindelöf* (*Proposição 2.6.10*), W *admite uma subcobertura enumerável, digamos* $\mathcal{C}''$. *Consequentemente,* $\mathcal{C}' \cup \mathcal{C}''$ *é uma subfamília enumerável de* $\mathcal{C}$ *que cobre* $\mathbb{R}$ *e assim* $(\mathbb{R},\sigma)$ *é de Lindelöf.*

3) *Considere* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. *A é fechado em* $(\mathbb{R}^2, \sigma_{prod})$ *e a topologia induzida em A é a topologia discreta. Em consequência, A não é espaço de Lindelöf, pois A é discreto e não enumerável. Logo* $(\mathbb{R}^2, \sigma_{prod})$ *não é de Lindelöf, pois se fosse, como A é um subespaço fechado, pela Proposição 2.6.12, A também seria de Lindelöf, o que não ocorre.*

4) $(\mathbb{R}^2, \sigma_{prod})$ *é separável pois* $\mathbb{Q}^2$ *é enumerável e denso em* $\mathbb{R}^2$*, mas o subespaço* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=0\}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *não é separável, pois A é discreto e não enumerável.*

2.8 Exercícios Gerais

1) Sejam (S,σ) um espaço topológico e $\emptyset \neq C \subseteq A \cup B \subseteq S$. Mostre que se $C \in \sigma_{A\cup B}$ então $C \cap A \in \sigma_A$ e $C \cap B \in \sigma_B$. Dê um contraexemplo para mostrar que a recíproca é falsa.

2) Prove que se U é aberto em S e F é fechado em S, então $U - F$ é aberto em S e $F - U$ é fechado em S.

3) (*Topologia da Ordem*). Seja E um conjunto totalmente ordenado. Dizemos que um subconjunto $A \subseteq E$ é *aberto* se, para todo $x \in A$, o conjunto A contém um intervalo $]x_1, x_2[$, onde $x_1 < x < x_2$, ou um intervalo $[x, x_2[$ se não existe $x_1 < x$, ou um intervalo $]x_1, x]$ se não existe $x_2 > x$, ou ainda, $A = \{x\}$ no caso em que $E = \{x\}$.

   a) Demonstre que a classe dos conjuntos abertos definidos acima constitui uma topologia sobre E. Tal topologia é chamada ***topologia da ordem*** sobre o conjunto totalmente ordenado E.

   b) Verifique que, em $\mathbb{R}$, a topologia usual da reta e a topologia da ordem coincidem.

4) Considere a topologia $\sigma = \{E, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ no conjunto $E = \{a,b,c\}$.

   a) Encontre os fechados de (E,σ).

   b) Sendo $A = \{b,c\}$, determine A°, $\overline{A}$, $\overline{A^c}$, A' e $Fr(A)$.

   c) Para que pontos de E a sequência $(a,c,a,c,a,c,\ldots)$ converge?

5) Seja $\sigma = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]q, +\infty[: q \in \mathbb{Q}\}$. Mostre que σ não é uma topologia sobre $\mathbb{R}$.

6) Seja $E = [-1,1]$. Considere a classe $\sigma = \{G \subseteq E : 0 \notin G \text{ ou }]-1,1[\subseteq G\}$.

   a) Prove que σ é uma topologia sobre E;

   b) Descreva os fechados de E.

7) Seja $f : E \to F$ uma função. Admitindo que exista uma topologia ξ sobre F, mostre que $\sigma = \{f^{-1}(G) : G \in \sigma\}$ é uma topologia sobre E.

8) Seja $\{\sigma_i\}_{i\in I}$ uma coleção de topologias num conjunto X. Prove que $\sigma = \bigcap_{i\in I} \sigma_i$ é também uma topologia sobre X. Em particular, se σ_1 e σ_2 são topologias, então $\sigma_1 \cap \sigma_2$ é topologia em X. A reunião $\sigma_1 \cup \sigma_2$ é uma topologia em X?

9) Sejam S um espaço topológico e $A \subseteq S$. Suponha que para todo $x \in A$, exista um aberto U contendo x tal que $U \subseteq A$. Mostre que A é aberto em S.

10) Seja S um conjunto totalmente ordenado com a topologia da ordem. Mostre que $\overline{]a,b[} \subseteq [a,b]$. Sobre quais condições vale igualdade?

11) Sejam A, B e A_λ, $\lambda \in L$, subconjuntos de um espaço S. Verifique que:

a) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$, e que em geral não temos a igualdade.

b) $\bigcup \overline{A_\lambda} \subseteq \overline{\bigcup A_\lambda}$, para qualquer família de subconjuntos A_λ, e dê um exemplo para mostrar que a igualdade falha. (*Sugestão*: tome $A_n = \{1/n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$ em $\mathbb{R}$ com a topologia usual.)

c) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

d) $(A \cap B)' = A' \cap B'$.

e) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

12) Mostre que:

a) Subespaço de um espaço de Hausdorff é um espaço de Hausdorff (i. é, ser Hausdorff é propriedade hereditária).

b) O produto de dois espaços de Hausdorff é de Hausdorff (ser Hausdorff é transferível para o produto).

c) Um espaço totalmente ordenado com a topologia da ordem é de Hausdorff.

13) Sejam (S, σ) um espaço topológico e $A \subseteq S$.

a) Mostre que $A^\circ \cap Fr(A) = \emptyset$.

b) Se A é aberto, é verdade que $A = (\overline{A})^\circ$? (*Sugestão*: tome $(\mathbb{R}, \sigma_{cof})$ e $A = \mathbb{R} - \{2\}$.)

c) Prove que A é aberto se, e somente se, $Fr(A) = \overline{A} - A$.

d) Prove que A é aberto se, e somente se, $A \cap Fr(A) = \emptyset$.

14) Determine a fronteira e o interior de cada subconjunto do $\mathbb{R}^2$ seguinte:

a) $A = \{(x,y) : y = 0\}$;

b) $B = \{(x,y) : x > 0 \text{ e } y \neq 0\}$;

c) $C = A \cup B$;

d) $D = \{(x,y) : x \text{ é racional}\}$;

e) $E = \{(x,y) :\ 0 < x^2 - y^2 \leq 1\}$, $F = \{(x,y) :\ x \neq 0 \text{ e } y \leq \frac{1}{x}\}$.

15) Sejam $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ com relação de ordem usual entre os elementos de $\mathbb{R}$ e com $-\infty < x < +\infty$, se $x \in \mathbb{R}$. Considere sobre $\overline{\mathbb{R}}$ a topologia da ordem. Mostre que:

a) $\mathbb{R}$ é aberto em $\overline{\mathbb{R}}$ e $\mathbb{R}$ não é fechado em $\overline{\mathbb{R}}$;

b) $\overline{\mathbb{R}}$ é separável, isto é, tem um subconjunto denso enumerável.

16) Verificar que:

a) $\overline{A}\cap\overline{B}=\emptyset \Rightarrow Fr(A\cup B)=Fr(A)\cup Fr(B)$;

b) $\overline{A}-\overline{B}\subseteq\overline{A-B}$;

17) Sejam $\mathcal{B}$ uma base para a topologia σ em S e (x_n) uma sequência em S. Mostre que $x_n \to x$ se, e somente se, para todo $B\in\mathcal{B}$ com $x\in B$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $n>n_0$ implica $x_n\in B$.

18) Mostre que se $\mathcal{B}$ é uma base para a topologia σ em S, então σ é a interseção de todas as topologias em S que contêm $\mathcal{B}$. O mesmo ocorre se $\mathcal{B}$ é uma sub-base.

19) Prove que se A é fechado em S e se B é fechado em T, então $A\times B$ é fechado em $S\times T$, com a topologia produto.

20) Prove que um espaço topológico S é de Hausdorff se, e somente se, a diagonal $\triangle=\{(x,x):x\in S\}$ é fechada no produto $S\times S$.

21) Sobre o conjunto $S=[0,1]\times[0,1]$ considere a ordem ***lexicográfica***, isto é, $(a,b)\leq(c,d)$ se e somente se $a<c$ ou $a=c$ e $b\leq d$. Determine os fechos dos seguinte conjuntos em S com a topologia da ordem:

a) $\{(\frac{1}{n},0):n\in\mathbb{N}^*\}$.

b) $\{(1-\frac{1}{n},\frac{1}{2}):n\in\mathbb{N}^*\}$.

c) $\{(x,0):0<x<1\}$.

d) $\{(x,\frac{1}{2}):0<x<1\}$.

e) $\{(\frac{1}{2},y):0<y<1\}$.

22) Seja (S,σ) um espaço topológico. Uma ***vizinhança fechada*** de $x\in S$ é um subconjunto fechado de S cujo interior contém x. Mostre que um espaço topológico (S,σ) é de Hausdorff se, e somente se, a interseção de todas as vizinhanças fechadas de $x\in S$ se reduz a $\{x\}$, para todo $x\in S$.

23) Seja S um conjunto e, para cada $x\in S$, considere uma classe $\mathcal{V}_x\subseteq\mathcal{P}(S)$, tal que:

(i) $x\in V$, $\forall\, V\in\mathcal{V}_x$;

(ii) $V_1,V_2\in\mathcal{V}_x\Rightarrow\exists\, V_3\in\mathcal{V}_x$ tal que $V_3\subseteq V_1\cap V_2$;

(iii) $V\in\mathcal{V}_x\Rightarrow\exists\, U\in\mathcal{V}_x$, $U\subseteq V$ tal que $V\in\mathcal{V}_y$, $\forall\, y\in U$.

Demonstre que existe uma única topologia em S tal que, para todo $x\in S$, $\mathcal{V}_x$ é o sistema fundamental de vizinhanças de x nesta topologia. (*Sugestão*: defina $\sigma=\{G\in\mathcal{P}(S):\ \forall\, x\in G,\ \exists\, V\in\mathcal{V}_x \text{ com } V\subseteq G\}$.)

24) Determine as sequências convergentes de $\mathbb{R}$ com a topologia que têm como base a família dos intervalos da forma $[a,+\infty[$, $a \in \mathbb{R}$.

25) Prove que o conjunto dos pontos isolados de um espaço que satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade é enumerável.

26) Prove que a família de todos os semiplanos abertos constitui uma sub-base para a topologia usual do plano $\mathbb{R}^2$.

27) Seja S um conjunto infinito. Mostre que a topologia em S gerada pelos subconjuntos infinitos de S é a topologia discreta.

28) Seja d uma métrica qualquer em $M \neq \emptyset$. Prove que $\overline{d}(x,y) := min\{1,\ d(x,y)\}$ e $d'(x,y) := \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ são também métricas sobre M e que d é equivalente a $\overline{d}$ e a d'. Conclua que as topologias correspondentes (induzidas por essas métricas) são iguais. (*Sugestão*: vide Observação 2.1.7.) A métrica $\overline{d}$ é chamada ***métrica limitada padrão*** correspondente a d.

29) Demonstre que G é aberto em um espaço S se, e somente se, $\overline{G\cap\overline{X}} = \overline{G\cap X}$, para todo $X \subseteq S$.

30) Prove as seguintes afirmações para um espaço topológico S:

a) se $\{X_t, t\}$ é uma família de subconjuntos de espaço S então $\bigcup X_t^\circ \subseteq (\bigcup X_t)^\circ$.

b) $Fr(X) = (X \cap \overline{X^c}) \cup (\overline{X} - X)$, para todo $X \subseteq S$.

c) $\overline{X} = X \cup Fr(X)$, para todo $X \subseteq S$.

d) $Fr(X) \cup Fr(Y) = Fr(X \cup Y) \cup Fr(X \cap Y) \cup [Fr(X) \cap Fr(Y)]$, para todos $X,\ Y\ \subseteq S$.

e) $Fr(X^\circ) \subseteq Fr(X)$, para todo $X \subseteq S$.

f) $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$, para $A \subseteq S,\ B \subseteq T$, T espaço topológico e $S \times T$ com a topologia produto.

g) $Fr(A \times B) = (Fr(A) \times B) \cup (A \times Fr(B))$.

31) Verifique que $\mathbb{R}$ com a topologia $\sigma = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{\ ]a,+\infty[\ : a \in \mathbb{R}\}$ é separável.

32) Prove que e_1 e e_2 são propriedades hereditárias e que se transferem para o produto cartesiano finito de espaços topológicos.

Capítulo 3

Continuidade

"A Matemática oferece às ciências exatas um certo grau de segurança que sem ela não poderiam alcançar."

(A. Einstein)

3.1 Aplicações Contínuas

No curso de Cálculo Diferencial e Integral, uma função $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ é dita *contínua* em $p \in A$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, de modo que $|x - p| < \delta$ implica $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$, isto é, $f(x)$ fica *arbitrariamente* próximo de $f(p)$ quando x se torna *suficientemente* próximo de p. Uma outra maneira de escrever a definição anterior é a seguinte:

f é *contínua* em p se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(B(p,\delta)) \subseteq B(f(p),\varepsilon)$

(isto é, a imagem da bola aberta de centro p e raio δ está contida na bola de centro $f(p)$ e raio ε). Assim, a noção de proximidade é formulada em termos de bolas abertas.

Num espaço topológico, definimos continuidade de uma aplicação substituindo as bolas abertas (da reta ou de um espaço métrico mais geral) por abertos da topologia. Mostramos, em seguida, que desta forma obtém-se uma extensão natural do conceito.

Com a notação $f : (S,\sigma) \to (T,\xi)$ representaremos uma aplicação de S em T, sendo S e T espaços topológicos com as topologias σ e ξ, respectivamente.

Definição 3.1.1. *Dizemos que $f : (S,\sigma) \to (T,\xi)$ é **contínua num ponto** $p \in S$ se, dado $U \in \xi$ com $f(p) \in U$, então existe $G \in \sigma$, tal que $p \in G$ e $f(G) \subseteq U$.*

*Dizemos que f é **contínua** em S se for contínua em todos os pontos de S.*

Exemplo 3.1.2. 1) *Sejam (T,ξ) um espaço topológico, $X \subseteq T$ e ξ_X a topologia induzida sobre X. Então, a aplicação inclusão $i : (X,\xi_X) \to (T,\xi)$ dada por $i(x) = x$ é contínua. De fato, sejam $x \in X$ e $U \in \xi$ tal que $i(x) = x \in U$. Então $U \cap X \in \xi_X$, além disso, $x \in U \cap X$ e $i(U \cap X) = U \cap X \subseteq U$.*

2) *Dados S e T não vazios, toda aplicação $f : (S,\sigma_{dis}) \to (T,\xi)$ é contínua, quaisquer que seja a topologia ξ em T.*

3) *Toda aplicação* $f:(S,\sigma)\to(T,\sigma_{cao})$ *é contínua, considerando qualquer topologia* σ *em* S.

4) *As projeções de* $S_1\times S_2$ *em* S_1 *e* S_2 *são contínuas* ($S_1\times S_2$ *com a topologia produto*). *Vejamos que* $p_1 : S_1\times S_2\to S_1;\ p_1(x,y)=x$ *é contínua* (*a prova de que a projeção sobre a outra coordenada é contínua é análoga*). *De fato, sejam* $(x_0,y_0)\in S_1\times S_2$ *e* U *um aberto de* S_1 *contendo* x_0. *Então* $U\times S_2$ *é aberto em* $S_1\times S_2$ *relativamente a topologia produto,* $(x_0,y_0)\in U\times S_2$ *e* $p_1(U\times S_2)=U$, *donde* p_1 *é contínua em* (x_0,y_0).

Proposição 3.1.3. (*Continuidade da aplicação identidade*) *Sejam* S *um conjunto não vazio,* σ *e* ξ *topologias em* S. *A aplicação identidade* $id:(S,\sigma)\to(S,\xi)$ *é contínua se e somente se* σ *é mais fina que* ξ (*ou seja,* $\xi\subseteq\sigma$).

Demonstração. Suponhamos $id:S\to S$ contínua. Seja $U\in\xi$. Se $U=\emptyset$, então $U\in\sigma$. Se $U\neq\emptyset$, para todo $x\in U$, como id é contínua existe $G_x\in\sigma$ tal que $x\in G_x$ e $G_x=id(G_x)\subseteq U$, de modo que U é aberto em σ. Assim $U\in\sigma$ e, em consequência, $\xi\subseteq\sigma$.

Reciprocamente, se $\xi\subseteq\sigma$, dado $x\in S$ e $U\in\xi$ tal que $id(x)=x\in U$, considerando $G=U\in\xi\subseteq\sigma$, tem-se $id(G)=id(U)=U$. Assim $id:(S,\sigma)\to(S,\xi)$ é contínua. □

Proposição 3.1.4. *Seja* $f:(S,\sigma)\to(T,\xi)$ *uma aplicação. São equivalentes as seguintes afirmações:*

(i) f *é contínua;*

(ii) $f^{-1}(U)\in\sigma$, *para todo* $U\in\xi$*;*

(iii) $f^{-1}(F)$ *é fechado em* S, *para todo* F *fechado em* T.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) Seja U um aberto em T. Se $f^{-1}(U)=\emptyset$, então $f^{-1}(U)\in\sigma$, de modo que podemos supor $f^{-1}(U)\neq\emptyset$. Sejam $x\in f^{-1}(U)$ e $y=f(x)\in U$. Como f é contínua em x, existe $G\in\sigma$ tal que $x\in G$ e $f(G)\subseteq U$. Assim $G\subseteq f^{-1}(U)$, de modo que $f^{-1}(U)$ é aberto.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Seja F um fechado de T. Então F^c é aberto e por (ii), $f^{-1}(F^c)=(f^{-1}(F))^c$ é aberto. Logo $f^{-1}(F)$ é fechado.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Dados $x\in S$ e U um aberto de T tal que $f(x)\in U$, segue que $F=U^c$ é fechado em T e $f(x)\notin F$. Assim, pela condição (iii), $f^{-1}(F)$ é fechado em S e $x\notin f^{-1}(F)$, donde $x\in(f^{-1}(F))^c$. Se $G=(f^{-1}(F))^c=f^{-1}(U)$, então $G\in\sigma$, $x\in G$ e $f(G)\subseteq U$. Portanto f é contínua. □

Observação 3.1.5. *Seja* $f:(S,\sigma)\to(T,\xi)$ *uma aplicação. Então podemos definir a "aplicação imagem inversa"* $\boldsymbol{f}^{-1}:\mathcal{P}(T)\to\mathcal{P}(S)$ *que associa a cada* $U\in\mathcal{P}(T)$ *o conjunto* $f^{-1}(U)=\{x\in S: f(x)\in U\}\in\mathcal{P}(S)$, *isto é, que a cada subconjunto de* T, *associa-se a sua imagem inversa por* f, *que é um subconjunto de* S (*lembramos que* $\sigma\subseteq\mathcal{P}(S)$ *e que* $\xi\subseteq\mathcal{P}(T)$).

A Proposição 3.1.4 afirma, entre outras coisas, que f *é contínua se, e somente se,* $\boldsymbol{f}^{-1}(\xi)\subseteq\sigma$, *isto é,* $\boldsymbol{f}^{-1}$ *aplica a topologia de* T *na topologia de* S. *De outro modo,* f *é contínua se, e somente se, a aplicação* (*imagem inversa*) $\boldsymbol{f}^{-1}$ *restrita à* ξ *é uma aplicação entre as topologias, isto é,* $\boldsymbol{f}^{-1}|_{\xi}:\xi\to\sigma$

é uma aplicação. Esta é a razão principal pela qual as aplicações contínuas são as aplicações consideradas em topologia.

Proposição 3.1.6. *Se $f : (S,\sigma) \to (T,\xi)$ e $g : (T,\xi) \to (X,\mu)$ são aplicação contínuas, então $g \circ f : (S,\sigma) \to (X,\mu)$ é contínua.*

Demonstração. Dado V aberto em X, $g^{-1}(V)$ é aberto em T (pois g é contínua) e como f é contínua, $f^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f)^{-1}(V)$ é aberto em S, o que implica que $g \circ f$ é contínua. □

Proposição 3.1.7. *Seja $f : (S,\sigma) \to (T,\xi)$ uma aplicação. Então f é contínua se, e somente se, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, para todo $A \subseteq S$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $y = f(x)$ com $x \in \overline{A}$. Vamos mostrar que $y \in \overline{f(A)}$. Seja $U \in \xi$, com $y = f(x) \in U$. Como f é contínua, existe $G \in \sigma$, $x \in G$ tal que $f(G) \subseteq U$. Agora, $x \in \overline{A}$ e $x \in G \in \sigma$, logo $G \cap A \neq \emptyset$, isto é, existe $z \in G \cap A$. Daí, $f(z) \in f(G) \cap f(A) \subseteq U \cap f(A)$. Portanto $U \cap f(A) \neq \emptyset$ e assim $y \in \overline{f(A)}$. Em consequência, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, para todo $A \subseteq S$.

($\Leftarrow$) Seja $F \subseteq T$ um fechado. Mostraremos que $A = f^{-1}(F)$ é fechado, isto é, $\overline{A} \subseteq A$. De fato, por hipótese, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, de modo que, $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$, donde segue, substituindo A e usando que F é fechado, que

$$\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}) = f^{-1}(\overline{f(f^{-1}(F))}) = f^{-1}(\overline{F \cap f(S)}) \subseteq f^{-1}(\overline{F}) = f^{-1}(F) = A.$$

Assim, $\overline{A} = A$, e portando A é fechado. □

A proposição seguinte reduz a verificação da continuidade aos aberto básicos, ou mais ainda, aos abertos sub-básicos.

Proposição 3.1.8. *Sejam $f : (S,\sigma) \to (T,\xi)$ uma aplicação, $\mathfrak{B} = \{U_\lambda : \lambda \in L\}$ uma base para ξ e $\mathfrak{S} = \{V_\mu : \mu \in M\}$ uma sub-base para ξ. Então:*

(i) *f é contínua se, e somente se, para todo $U_\lambda \in \mathfrak{B}$, tem-se $f^{-1}(U_\lambda) \in \sigma$.*

(ii) *f é contínua se, e somente se, para todo $V_\mu \in \mathfrak{S}$, tem-se $f^{-1}(V_\mu) \in \sigma$.*

Demonstração. Mostraremos (ii). Se f é contínua e V_μ sub-básico, então $f^{-1}(V_\mu) \in \sigma$, pois a imagem inversa de aberto é aberto, de modo que a condição é necessária. Para estabelecermos que a condição é suficiente, seja $U \in \xi$ um aberto. Como $\mathfrak{S}$ é sub-base, U é a reunião de interseções finitas de elementos de $\mathfrak{S}$, isto é, $U = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{k=1}^{n_i} V_{i_k}\right)$, onde I é um conjunto qualquer e $n_i \in \mathbb{N}^*$. Assim, usando as propriedades de imagens inversas de reuniões e interseções, temos

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I}\left(\bigcap_{k=1}^{n_i} V_{i_k}\right)\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^{n_i} V_{i_k}\right) = \bigcup_{i \in I}\left(\bigcap_{k=1}^{n_i} f^{-1}(V_{i_k})\right).$$

Como, por hipótese cada $f^{-1}(V_{i_k})$ é aberto, segue que $f^{-1}(U)$ é aberto, donde f é contínua. □

3.1.1 Continuidade em Espaços Métricos

Sejam (M,d) e (N,d') espaços métricos, σ e σ' as topologias induzidas pelas métricas d e d', respectivamente. O conjunto das bolas abertas de centro num ponto p e raio $r>0$ forma uma base para as topologias induzidas pelas métricas dos espaços M e N. Deste modo, $f:(M,d)\to(N,d')$ é contínua em $p\in M$ se, e somente se:

$$\forall\, U\in\sigma',\ f(p)\in U,\ \exists\, G\in\sigma,\ p\in G:\ f(G)\subseteq U\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\forall\, B(f(p),\varepsilon),\ \varepsilon>0,\ \exists\, B(p,\delta):\ f(B(p,\delta))\subseteq B(f(p),\varepsilon)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0:\ d(x,p)<\delta\Rightarrow d(f(x),f(p))>\varepsilon.$$

3.1.2 Exercícios

1) Justifique as equivalências apresentadas acima em 3.1.1

2) Sejam (M,d) e (N,d') dois espaços métricos. Uma aplicação $f:M\to N$ é uma **imersão isométrica** se $d'(f(x),f(y))=d(x,y)$, para todos $x,y\in M$. Uma imersão isométrica é sempre injetora (porque?). Uma imersão isométrica sobrejetora (e portanto bijetora) é denominada **isometria** (assim, se $f:M\to N$ é uma imersão isométrica então $f:M\to f(M)$ é uma isometria). Mostre que toda imersão isométrica (e portanto toda isometria) é uma aplicação contínua.

3) Sejam S um espaço topológico, T um espaço de Hausdorff e $f,g:S\to T$ aplicações contínuas. Mostre que $\{x\in S: f(x)=g(x)\}$ é um subconjunto fechado de S.

4) Sejam S um espaço topológico, T um espaço de Hausdorff e $f:S\to T$ uma aplicação contínua.

   a) Mostre que o gráfico $G_f=\{(x,f(x))\in S\times T: x\in S\}$ é fechado no produto $S\times T$. (*Sugestão*: tome $(x,y)\in\overline{G_f}$, usando a continuidade de f mostre que toda vizinhança de $f(x)$ intersecta toda vizinhança de y, donde segue da condição de T ser de Hausdorf que $y=f(x)$ e assim $(x,y)\in G_f$.)

   b) Verifique que a recíproca é falsa através do contraexemplo $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ dada por $f(0)=0$ e $f(t)=1/t$, se $0<t\leq 1$.

5) Sejam $f:S\to T$ contínua e $E\subseteq S$. Prove que a restrição $f|_E$ de f a E é contínua.

6) Mostre que $f:X\to Y$ é contínua se, e somente se, $f:X\to f(X)$ é contínua ($f(X)$ tem a topologia induzida de Y).

7) Seja $f:X\to Y$ uma aplicação, onde Y é um espaço topológico e X é um conjunto não vazio. Considere a topologia sobre X dada por $\sigma=\{f^{-1}(A)\subseteq X: A \text{ é aberto em } Y\}$ (ver Exercício 2.8 - 7). Prove que f é contínua (considerando em X essa topologia).

8) Sejam X um espaço topológico, Y um espaço métrico e A um subespaço de X. Mostre que, se $f : A \to Y$ é contínua, então f pode ser estendida a uma aplicação contínua $\bar{f} : \overline{A} \to Y$ que é única.

9) Sejam X um espaço topológico e $A \subseteq X$. A ***função característica*** de A é a função $c_A : X \to \mathbb{R}$, dada por $c_A(x) = 1$, se $x \in A$, e, $c_A(x) = 0$, se $x \notin A$. Prove que, com a topologia usual em $\mathbb{R}$, c_A é contínua em $p \in X$ se, e somente se, $p \notin Fr(A)$.

10) Determinar todas as funções contínuas $f : (\mathbb{R}, \sigma) \to (\mathbb{R}, \sigma)$, com $\sigma = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{\,]a, +\infty[: a \in \mathbb{R}\}$.

3.2 Continuidade em Espaços e_1

Aplicações contínuas levam sequências convergentes em sequências convergentes. A recíproca desta fato é, em geral, falsa. No entanto, no caso em que o domínio da aplicacão satisfaz o Primeiro Axioma de Enumerabilidade (é e_1), a recíproca é verdadeira, de modo que neste caso, a continuidade pode ser deduzida a partir da convergência de sequências.

Proposição 3.2.1. *Se $f : (S, \sigma) \to (T, \xi)$ é uma aplicação contínua em $x \in S$ e (x_n) é uma sequência de pontos de S tal que $x_n \to x$, então a sequência $(f(x_n))$ converge para $f(x)$ em T.*

Demonstração. Suponha que $f : S \to T$ é contínua e seja (x_n) uma sequência em S convergindo para x. Mostremos que $f(x_n) \to f(x)$. Para isso, seja $U \in \xi$ tal que $f(x) \in U$. Como f é contínua em x, existe $G \in \sigma$, com $x \in G$, tal que $f(G) \subseteq U$. Como $x_n \to x$, e $x \in G$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $x_n \in G$, para todo $n \geq n_0$. Nestas condições, para $n \geq n_0$, como $x_n \in G$, segue que $f(x_n) \in f(G) \subseteq U$. Portanto $f(x_n) \to f(x)$. □

Definição 3.2.2. *Dizemos que $f : (S, \sigma) \to (T, \xi)$ é* ***sequencialmente contínua*** *se $f(x_n) \to f(x)$, quando $x_n \to x$, para toda sequência (x_n) e $x \in S$.*

A Proposição 3.2.1 implica que, se f é contínua, então f é sequencialmente contínua. A recíproca deste fato é falsa, como mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 3.2.3. *Sejam $S = \mathbb{R}$, com a topologia $\sigma = \sigma_{coen} = \{\emptyset\} \cup \{G \subseteq S : \ G^c = S - G$ é enumerável$\}$, $T = [0,1] \subseteq S$ com a topologia ξ de subespaço de S $(\xi = \{G \cap [0,1] : G \in \sigma\})$ e $f : S \to T$ dada por $f(x) = x$, se $x \in [0,1]$, e $f(x) = 0$, se $x \notin [0,1]$. A função f não é contínua e é sequencialmente contínua. De fato, f não é contínua pois, por exemplo, tomando $F = \{0\}$, tem-se que F é fechado em T (visto que $\{0\}^c = (\mathbb{R} - \{0\}) \cap [0,1] \in \xi$), mas $f^{-1}(\{0\}) = \,]-\infty, 0] \cup \,]1, +\infty[$ não é fechado em S. Agora, que f é sequencialmente continua segue do fato que, em $(\mathbb{R}, \sigma)$, as sequências convergentes são as estacionárias, ou seja, em $(\mathbb{R}, \sigma)$ uma sequência $x_n \to p$ se, e somente se, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $x_n = p$, para todo $n \geq n_0$ (Exercício 2.3.1-1). Logo, $f(x_n) = f(p)$, para todo $n \geq n_0$, e portanto, $f(x_n) \to f(p)$.*

Proposição 3.2.4. *Seja (S,σ) um espaço satisfazendo o primeiro axioma de enumerabilidade. Então $f:(S,\sigma)\to(T,\xi)$ é contínua se, e somente se, f é sequencialmente contínua.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ É verdadeira mesmo que (S,σ) não seja e_1 (Proposição 3.2.1).

$(\Leftarrow)$ Suponhamos f sequêncialmente contínua. Se f não fosse contínua em algum $x\in S$, teríamos um aberto $U\in\xi$ contendo $f(x)$ tal que, para todo aberto G de S contendo x, tem-se $f(G)\nsubseteq U$. Em particular, se $\mathcal{U}_x=\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ é uma base local encaixada em x (que existe pois S é e_1), então $f(U_i)\nsubseteq U$, para todo $i\in\mathbb{N}^*$. Seja $x_i\in U_i$ com $f(x_i)\notin U$. A sequência (x_i) converge para x, mas $f(x_i)$ não converge para $f(x)$, contrariando a hipótese. Desta forma, f é contínua em x, para todo $x\in S$, logo f é contínua. □

Corolário 3.2.5. *Em espaços métricos, uma aplicação é contínua, se e somente se é sequencialmente contínua.*

3.2.1 Exercício

1) Prove que se X e Y são espaços métricos então $f:X\to Y$ é contínua se, e somente se, f é sequêncialmente contínua (corolário anterior). O resultado vale se X é um espaço métrico e Y é um espaço topológico qualquer? E se X é um espaço topológico qualquer e Y um espaço métrico? Justifique.

3.3 Aplicações Abertas, Aplicações Fechadas e Homeomorfismos

Nesta seção definimos aplicações abertas, fechadas e homeomorfismos entre espaços topológicos.

Definição 3.3.1. *Seja $f:(S,\sigma)\to(T,\xi)$ uma aplicação. Dizemos que:*

(1) *f é **aberta** se a imagem de qualquer aberto de S é um aberto em T, isto é,*
$$G\in\sigma \;\Rightarrow\; f(G)\in\xi,\ \forall\, G\in\sigma.$$

(2) *f é **fechada** se a imagem de qualquer fechado de S é fechado em T, isto é, se F é fechado em S então $f(F)$ fechado em T, para todo F fechado em S.*

Exemplo 3.3.2. 1) *Seja $A\subseteq S$. A inclusão $i:(A,\sigma_A)\to(S,\sigma)$; $i(x)=x$, é uma aplicação aberta (aplicação fechada) se, e somente se, A é um subconjunto aberto (subconjunto fechado) de S.*

2) *As projeções $p_1:S_1\times S_2\to S_1$ e $p_2:S_1\times S_2\to S_2$, dadas por $p_1(x,y)=x$ e $p_2(x,y)=y$ são aplicações abertas ($S_1\times S_2$ com a topologia produto).*

3) *Uma aplicação pode não ser aberta nem fechada. Sejam $S=T=\{a,b,c\}$, $\sigma=\{\emptyset,\{a\},S\}$ e $\xi=\{\emptyset,\{a,b\},\{c\},T\}$. A aplicação identidade $id:(S,\sigma)\to(T,\xi)$ não é aberta e nem fechada.*

Definição 3.3.3. *Dizemos que uma aplicação $f : (S,\sigma) \to (T,\xi)$ é um* ***homeomorfismo*** *se f é contínua, bijetora e f^{-1} é contínua. Dizemos que dois espaços são* ***homeomorfos*** *se existe um homeomorfismo entre eles.*

Notemos que a relação "*ser homeomorfos*" é uma relação de equivalência entre espaços topológico. Se $f : (S,\sigma) \to (T,\xi)$ é um homeomorfismo, então aplicação imagem inversa (já referida na Observação 3.1.5) $\mathbf{f}^{-1} : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(S)$ que associa a cada $U \in \mathcal{P}(T)$ o conjunto $f^{-1}(U) = \{x \in S : f(x) \in U\} \in \mathcal{P}(S)$ é bijetora e satisfaz $\mathbf{f}^{-1}(\xi) = \sigma$ (e existe uma correspondência entre os abertos de S e T). Assim, homeomorfismo é a equivalência topológica:

"*no estudo das propriedades topológicas não se distingue dois espaços homeomorfos*".

Exemplo 3.3.4.

1) *Sejam $S = T = \mathbb{R}$, $\sigma = \{\emptyset, \{a\}, \mathbb{R}\}$ topologia em S e $\xi = \{\emptyset, \{b\}, \mathbb{R}\}$. A aplicação $f : S \to T$ dada por $f(a) = b$, $f(b) = a$ e $f(x) = x$ para $x \neq a$ e $x \neq b$ é um homeomorfismo.*

2) *A reta real com a topologia usual é homeomorfa ao subespaço $A = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in R\}$ com a topologia induzida do plano, através da aplicação $f : \mathbb{R} \to A$ definida por $f(x) = (x,0)$.*

3) (Projeção estereográfica) *Considere $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, com a topologia de subespaço de $\mathbb{R}^2$ (usual). $S^1 - \{(0,1)\}$ e $\mathbb{R}$ com a topologia usual são espaços homeomorfos, uma vez que a aplicação $\rho : S^1 - \{(0,1)\} \to \mathbb{R}$; $\rho((x,y) = x/(1-y)$ é um homeomorfismo. Mais geralmente, considerando $S^n = \{(x_1,...,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1\}$, a esfera n-dimensional, com a topologia (usual) de subespaço. $S^n - \{(0,...,1)\}$ e $\mathbb{R}^n$ são espaços homeomorfos com $\rho(x_1,...,x_n,x_{n+1}) = (x_1/(1-x_{n+1}),...,x_n/(1-x_{n+1})) = [1/(1-x_{n+1})].(x_1,...,x_n)$ sendo um homeomorfismo.*

4) $(\mathbb{R}, \sigma_{usual})$ *não é homeomorfo à* $(\mathbb{R}, \sigma_{dis})$.

5) *Todo espaço métrico (M,d) é homeomorfo a um espaço métrico limitado. Para ver isso tome, por exemplo, a métrica $\overline{d} = min\{1, d(x,y)\}$, d e $\overline{d}$ são equivalentes (vide Exercício 2.8 - 28), logo as topologias $\sigma_d = \sigma_{\overline{d}}$ e assim $id : (M,d) \to (M,\overline{d})$ é um homeomorfismo.*

Proposição 3.3.5. *Se $h : (S,\sigma) \to (T,\xi)$ é bijetora, então são equivalentes as seguintes afirmações:*

(i) *h é um homeomorfismo.*

(ii) *h é aberta e contínua.*

(iii) *h é fechada e contínua.*

(iv) *$h(\overline{A}) = \overline{h(A)}$, para todo $A \subseteq S$.*

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) Seja U um aberto S. Como $h^{-1} : T \to S$ é contínua e U é um aberto S, vem que $h(U) = (h^{-1})^{-1}(U)$ é aberto de T, donde segue que h é aberta. Agora h é contínua pois é homeomorfismo.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Se $F \subseteq S$ é fechado de S, então S^c é aberto em S. Assim, como h é aberta, segue que $h(F^c) = (h(F))^c$ é aberto de T. Logo $h(F)$ é fechado. Portanto h é fechada.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Como h é contínua, pela Proposição 3.1.7, temos $h(\overline{A}) \subseteq \overline{h(A)}$. Agora, como $h(\overline{A})$ é um fechado que contém $h(A)$, temos $\overline{h(A)} \subseteq h(\overline{A})$, e assim segue a tese.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Como $h(\overline{A}) = \overline{h(A)}$, pela Proposição 3.1.7, h é contínua. Agora, dado $B \subseteq T$, seja $A = h^{-1}(B)$. Temos

$$h(\overline{h^{-1}(B)}) = \overline{h(h^{-1}(B))} = \overline{B},$$

consequêntemente, $\overline{h^{-1}(B)} = h^{-1}(\overline{B})$ e h^{-1} é contínua, novamente pela Proposição 3.1.7. □

Definição 3.3.6. *Uma aplicação $f : (S,\sigma) \to (T,\xi)$ é um* ***homeomorfismo local*** *se, para todo $x \in S$, existe $G \subseteq S$, $G \in \sigma$ com $x \in G$, tal que $f(G) = H$, $H \in \xi$ e a restrição $f_{|G} : G \to H$ é homeomorfismo.*

Exemplo 3.3.7. *Considere $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^*$ com as topologias usuais. A função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ é um homeomorfismo local. Note que se consideramos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $g(x) = x^2$, g não é homeomorfismo local.*

Proposição 3.3.8. *Todo homeomorfismo local é uma aplicação aberta.*

Demonstração. Sejam $f : (S,\sigma) \to (T,\xi)$ um homeomorfismo local e V um aberto de S. Para todo $x \in V$, existe $G_x \subseteq S$, $G_x \in \sigma$, com $x \in G_x$, tal que $f(G_x) = H_x$, $H_x \in \xi$, e a restrição $f_{|G_x} : G_x \to H_x$ é homeomorfismo. Notemos que $U_x := G_x \cap V$ é aberto de G_x e como $f_{|G_x} : G_x \to H_x$ é homeomorfismo, $f(U_x)$ é aberto de H_x. Daí, $f(V) = f(\bigcup_{x\in V} (G_x \cap V)) = \bigcup_{x\in V} f(U_x)$ é aberto em T. □

Exemplo 3.3.9. *A função $f : \mathbb{R} \to S^1$ definida por $f(t) = (cos 2\pi t, sen 2\pi t)$, considerando em $\mathbb{R}$ e S^1 as topologias usuais, é um homeomorfismo local e uma aplicação aberta. Para ver que f é um homeomorfismo local observe que:*

(a) $\mathbb{R}$ é coberto por intervalos do tipo $]n, n+\frac{1}{2}[$, $]n-\frac{1}{2}, n[$, $]n-\frac{1}{4}, n+\frac{1}{4}[$, $]n+\frac{1}{4}, n+\frac{3}{4}[$, $n \in \mathbb{Z}$;

(b) $A_1 = \{(x,y) \in S^1;\ y > 0\}$, $A_2 = \{(x,y) \in S^1;\ y < 0\}$, $A_3 = \{(x,y) \in S^1;\ x > 0\}$, $A_4 = \{(x,y) \in S^1;\ x < 0\}$ são abertos de S^1, e

(c) as restrições $f_| :]n, n+\frac{1}{2}[\to A_1$, $f_| :]n-\frac{1}{2}, n[\to A_2$, $f_| :]n-\frac{1}{4}, n+\frac{1}{4}[\to A_3$, e $f_| :]n+\frac{1}{4}, n+\frac{3}{4}[\to A_4$ são homeomorfismos.

Que f é aberta segue da proposição anterior.

Observação 3.3.10. *Uma aplicação pode ser contínua, bijetora e não ser homeomorfismo (vide Exercício 3.3.1 - 1). Isto* não *acontece quando o domínio e o contradomínio é o espaço $\mathbb{R}$ com a topologia usual (Exercício 3.3.1 -* 2).

3.3.1 Exercícios

1) Dê um exemplo para mostrar que uma aplicação bijetora e contínua entre dois espaços topológicos pode não ser um homeomorfismo. (*Sugestão*: considere a aplicação $f : [0,1[\to S^1$ dada por $f(t) = (cos 2\pi t, sen 2\pi t)$.)

2) Considere $\mathbb{R}$ com a topologia usual. Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e bijetora então f é um homeomorfismo (vide Lima [13], Cap.7, §2, Teor. 5, p. 78).

3) Prove que as projeções $p_i : S_1 \times S_2 \to S_i$, $i = 1,2$, são aplicações abertas (Exemplo 3.3.2 - 2). Dê um exemplo para mostrar que podem não ser fechadas.

4) Seja M um conjunto não vazio munido de duas métricas: d e d'. Demonstre que as métricas d e d' são equivalentes se, e somente se, a aplicação identidade $id : (M,d) \to (M,d')$ é um homeomorfismo.

3.4 Propriedades Topológicas

Definição 3.4.1. *Uma propriedade (em espaços topológicos) é chamada* ***propriedade topológica*** *quando é preservada por homeomorfismos, isto é, todo espaço topológico homeomorfo ao espaço que satisfaz a propriedade, também deve satisfazê-la.*

Exemplo 3.4.2. *Seja (S,σ) um espaço topológico onde todo subconjunto unitário é fechado. A propriedade de que todo subconjunto unitário é fechado é uma propriedade topológica, pois, se $f : S \to T$ é um homeomorfismo e $y \in T$, então existe $x \in S$ tal que $y = f(x)$; assim $f(\{x\}) = \{y\}$ e $\{y\}$ é fechado por ser imagem de um fechado por um homeomorfismo.*

Exemplo 3.4.3. *Metrizabilidade é uma propriedade topológica. De fato, sejam (S,σ) um espaço topológico metrizável e (T,ξ) um espaço homeomorfo à (S,σ). Se $d : S \times S \to \mathbb{R}$ é a métrica que induz a topologia σ e $f : (T,\xi) \to (S,\sigma)$ é um homeomorfismo. Definimos $e : T \times T \to \mathbb{R}$ por $e(x,y) = d(f(x), f(y))$. É fácil ver que e é uma métrica sobre T. Além disso, se $U \in \xi$, então $f(U) \in \sigma$, de modo que $f(U) = \bigcup_{x \in f(U)} B(x, r_x)$, $r_x > 0$. Assim,*

$$U = f^{-1}\left(\bigcup_{x \in f(U)} B(x,r_x)\right) = \bigcup_{x \in f(U)} f^{-1}(B(x,r_x)) \overset{(*)}{=} \bigcup B(f^{-1}(x), r_x).$$

Justificativa de $(*)$:

$$z \in f^{-1}(B(x,r_x)) \Leftrightarrow f(z) \in B(x,r_x) \Leftrightarrow d(f(z),x) < r_x \Leftrightarrow e(f^{-1}(f(z)), f^{-1}(x)) < r_x$$

$$\Leftrightarrow e(z, f^{-1}(x)) < r_x \Leftrightarrow z \in B(f^{-1}(x), r_x).$$

Logo, U é uma união de bolas abertas relativamente à métrica e, de modo que U é aberto na topologia de T como espaço métrico com a métrica e.

Por outro lado, se U é aberto de T relativamente à métrica e, então $U = \bigcup_{x \in U} B(x, r_x)$, $r_x > 0$. Assim $f(U) = f(\bigcup B(x, r_x)) = \bigcup B(f(x), r_x) \in \sigma$, de modo que $U = f^{-1}(f(U)) \in \xi$ pois f é um homeomorfismo. Portanto ξ coincide com a topologia induzida pela métrica e, e consequentemente, (T, ξ) é metrizável.

Exemplo 3.4.4. *Separabilidade é uma propriedade topológica. De fato, suponhamos que $f : (S, \sigma) \to (T, \tau)$ seja um homeomorfismo e que exista $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ tal que $\overline{A} = S$. Então $T = f(S) = f(\overline{A}) = \overline{f(A)} = \overline{\{f(x_1), f(x_2), \ldots\}}$.*

Exemplo 3.4.5. *Os dois axiomas de enumerabilidade* (e_1 *e* e_2) *são propriedades topológicas.* (*Verifique!*)

Note que a propriedade de ser limitado (em espaços metrizáveis) não é propriedade topológica, pois, por exemplo, $X =]-1, 1[$ e $\mathbb{R}$ são espaços homeomorfos (com a métrica usual), X é limitado, enquanto que $\mathbb{R}$ não é.

3.5 Topologia Induzida por uma Família de Funções

Sejam S um conjunto não vazio e (T, ξ) um espaço topológico. Dada uma aplicação $f : S \to T$, não tem sentido perguntar se f é contínua ou não, pois aplicações contínuas são definidas entre dois espaços topológicos e S não é um espaço topológico.

Problema*: dar a S uma topologia relativamente à qual f resulta contínua.*

É fácil imaginar/acreditar que o problema acima tem, geralmente, muitas soluções. Uma solução (geral) é obtida considerando em S a topologia discreta, de fato neste caso toda aplicação torna-se contínua, independente da topologia de T. Reformula-se então a questão, pedindo (dado f e uma topologia ξ em T) que se dê uma topologia sobre S que seja a *menos fina* com esta propriedade, dado que a resposta para o problema como proposto acima é trivial.

Proposição 3.5.1. *Sejam S um conjunto não vazio, (T, ξ) um espaço topológico e $f : S \to (T, \xi)$ uma aplicação. Então, $\sigma = \{f^{-1}(U) : U \in \xi\}$ é uma topologia em S e $f : (S, \sigma) \to (T, \xi)$ é contínua. Além disso, σ é a topologia menos fina* (*menor topologia com relação a inclusão*) *com esta propriedade. Mais geralmente, se (T_i, ξ_i), $i \in I$ são espaços topológicos e $f_i : S \to (T_i, \xi_i)$ são aplicações, então $\mathcal{T} = \{f_i^{-1}(U) : U \in \xi_i,\ i \in I\}$ é uma sub-base para uma topologia σ em S* (*dada pelas reuniões de interseções finitas de elementos de $\mathcal{T}$*)*, relativamente à qual as aplicações f_i da família $\{f_i\}_{i \in I}$ são todas contínuas, e σ é a topologia menos fina em S com esta propriedade.*

Demonstração. O caso de uma única aplicação $f : S \to (T, \xi)$ é bem simples. Para o caso de uma família de aplicações $f_i : S \to (T_i, \xi_i)$, notemos que $\mathcal{T} = \{f_i^{-1}(U) : U \in \xi_i,\ i \in I\}$ é uma sub-base para uma topologia σ em S (pois S é reunião de elementos de $\mathcal{T}$). E σ é a menos fina que torna todas as f_i contínuas porque qualquer topologia τ em S que torna todas as f_i contínuas, necessariamente deve conter $\mathcal{T}$. $\square$

Definição 3.5.2. *A topologia em S obtida como na Proposição 3.5.1 é chamada* ***topologia induzida*** *sobre S pela aplicação f e topologia ξ, ou pela família de aplicações $\{f_i\}_{i\in I}$ e topologias ξ_i's.*

Exemplo 3.5.3. 1) *Dados um espaço topológico (T,ξ) e $X \subseteq T$, a topologia ξ_X do subespaço X é a topologia induzida pela inclusão $i : X \to T$, dada por $i(x) = x$.*

2) *Dados S_1 e S_2 espaços topológicos, a topologia produto em $S = S_1 \times S_2$ é a topologia induzida pelas projeções nas coordenadas, $p_i : S \to S_i$, $i = 1,2$.* (*Verifique!*)

3.5.1 Exercícios

1) Mostre que para qualquer aplicação constante $f : S \to (T,\xi)$; $x \mapsto c$ $(c \in T)$, a topologia induzida em S é a caótica $\sigma = \{\emptyset, S\}$.

2) Dados S um conjunto arbitrário, $(T_i,\xi_i)_{i\in I}$ uma família de espaços topológicos e $\{f_i : S \to (T_i,\xi_i)\}_{i\in I}$ uma família de aplicações constantes, determine a topologia induzida em S por essa família de aplicações.

3) Mostre que a topologia σ em $\mathbb{R}$ induzida pela função $f : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \sigma_{usual})$; $f(x) = 2x+1$ é a topologia usual. (*Sugestão*: note que $]c,d[\, \in \sigma$, para todos $c < d$, $c,d \in \mathbb{R}$, pois $]c,d[\, = f^{-1}(]2c+1,\ 2d+1[)$.)

4) Determine a topologia em $\mathbb{R}$ induzida pela aplicação, $f : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \sigma_{usual})$; $f(x) = 0$ se $x \leq 0$ e $f(x) = 1$ se $x > 0$.

5) Considere em $\mathbb{R}$ a topologia do limite inferior gerada pelos intervalos $[a,b[, a,b \in \mathbb{R}, a < b$. Mostre que a topologia induzida em $\mathbb{R}$ por todas as aplicações lineares $f : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \sigma_{usual})$ é a topologia discreta. (*Sugestão*: para cada $u \in \mathbb{R}$, $\{u\} = f_1^{-1}([0,1[) \cap f_2^{-1}([0,1[)$, sendo $f_1(x) = x - u$ e $f_2(x) = -x + u$.)

3.6 Topologias Coinduzida e Quociente

A questão aqui é semelhante à tratada na Seção 3.5. Sejam (S,σ) um espaço topológico, T um conjunto não vazio e $f : S \to T$ uma aplicação.

Problema*: determinar uma topologia sobre T que torna f contínua.*

A topologia indiscreta $\varsigma = \{\emptyset, T\}$ sobre T tem a propriedade, independentemente de (S,σ) e f, sendo deste modo uma solução trivial para o problema. Também, se $f : (S,\sigma) \to (T,\xi)$ é contínua (ou seja se ξ é uma solução) e θ é menos fina que ξ, então $f:(S,\sigma)\to(T,\theta)$ é contínua. Nestas condições, queremos agora obter a topologia mais fina ("maior") em T que tem esta propriedade. Obviamente ela vai ter que depender de f e (S,σ).

Proposição 3.6.1. *Sejam (S,σ) um espaço topológico, $T\neq\emptyset$ um conjunto e $f:S\to T$ uma aplicação. Então:*

(i) $\xi=\{U\subseteq T : f^{-1}(U)\in\sigma\}$ *é uma topologia em T.*

(ii) $f:(S,\sigma)\to(T,\xi)$ *é contínua.*

(iii) ξ *é a topologia mais fina sobre T que torna f contínua.*

Demonstração. (i) Temos que $\emptyset$ e T são abertos em T pois $f^{-1}(\emptyset)=\emptyset$ e $f^{-1}(T)=S\in\sigma$. Também, $U_1,U_2\in\xi\Rightarrow f^{-1}(U_1\cap U_2)=f^{-1}(U_1)\cap f^{-1}(U_2)\in\sigma\Rightarrow U_1\cap U_2\in\xi$. Agora, $U_\lambda\in\xi$, $\forall\,\lambda\in L\Rightarrow$ $f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in L}U_\lambda\right)=\bigcup_{\lambda\in L}f^{-1}(U_\lambda)\in\sigma$, pois $f^{-1}(U_\lambda)\in\sigma$, para todo $\lambda\in L$, e σ é topologia. Assim $\bigcup_{\lambda\in L}U_\lambda\in\xi$.

(ii) $f:(S,\sigma)\to(T,\xi)$ é contínua, pois se $U\in\xi$ então $f^{-1}(U)\in\sigma$ (pela definição de ξ).

(iii) Se θ é uma topologia em T tal que $f:(S,\sigma)\to(T,\theta)$ é contínua, então, dado $V\in\theta$, tem-se $f^{-1}(V)\in\sigma$, e assim $V\in\xi$ (pela definição de ξ). Logo $\theta\subseteq\xi$, isto é, ξ é mais fina do que θ. $\square$

Definição 3.6.2. *Seja $f:(S,\sigma)\to T$ uma aplicação, com (S,σ) espaço topológico e $T\neq\emptyset$. A topologia em T como na Proposição 3.6.1 é chamada topologia em T **coinduzida** pela aplicação f e é denotada, às vezes, por σ_f.*

Exemplo 3.6.3. 1) *Considere $S=\{1,2,3\}$ com a topologia $\sigma=\{\emptyset,\{1\},S\}$, $T=\{a,b\}$, e $f:S\to T$ dada por $f(1)=f(3)=a$ e $f(2)=b$. Então a topologia σ_f em T, coinduzida por f, é a caótica.*

2) *Sejam (S_1,σ_1), (S_2,σ_2), espaços topológicos. Considere em $S=S_1\times S_2$ a topologia produto $\sigma=\sigma_1\times\sigma_2$ e sejam $p_i:(S,\sigma)\to S_i$, $i=1,2$ as projeções, então a topologia em S_i coinduzida por p_i, σ_{p_i}, coincide com σ_i, $i=1,2$.*

Observação 3.6.4. *Sejam (S,σ) um espaço topológico, T um conjunto não vazio, $f:S\to T$ uma aplicação e σ_f a topologia coinduzida em T. Se $f:S\to T$ não é sobrejetora e $y\in T-f(S)$, então $\{y\}\in\sigma_f$, pois $f^{-1}(\{y\})=\emptyset\in\sigma$. Assim, a topologia coinduzida σ_f definida em T é discreta fora da imagem de S. Por esta razão quando se considera em T a topologia coinduzida por $f:S\to T$, não se perde muito em trabalhar com $f:S\to f(S)$, de modo que podemos supor que $f:S\to T$ é sobrejetora.*

Um caso interessante e bastante útil de topologia coinduzida é o seguinte.

Definição 3.6.5. *Seja* (S,σ) *um espaço topológico munido de uma relação de equivalência* $\mathcal{R}$ *e considere* $S/\mathcal{R} = \{[x];\ x \in S\}$ *o conjunto das classes de equivalência (conjunto quociente). Então podemos considerar em* $S/\mathcal{R}$ *a topologia coinduzida pela aplicação* $q: S \to S/\mathcal{R}$*;* $x \mapsto q(x) := [x]$ *(aplicação canônica). Nesse caso a topologia (coinduzida) em* $S/\mathcal{R}$ *é chamada de* ***topologia quociente*** *e o espaço topológico* $S/\mathcal{R}$ *é chamado* ***espaço quociente*** *de S pela relação* $\mathcal{R}$*.*

Exemplo 3.6.6. 1) *Considere no espaço* $S = \mathbb{R}$ *dos números reais, a relação de equivalência* $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$*. Então podemos considerar em* $\mathbb{R}/\sim$ *a topologia quociente. Note que há uma bijeção entre* $\mathbb{R}/\sim$ *e* S^1*, o círculo de raio* 1 $(\mathbb{R}/\sim\ \to S^1;\ [x] \mapsto e^{2\pi i x} \equiv (cos 2\pi x, sen 2\pi x))$*. Esse espaço quociente é as vezes também denotado por* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$*.*

2) *Se tomarmos* $\mathbb{R}^2$ *com a topologia usual e a relação de equivalência*

$$(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1 - x_2 \text{ e } y_1 - y_2 \in \mathbb{Z},$$

obtemos uma estrutura de espaço topológico para o espaço quociente $\mathbb{R}^2/\sim$*, também denotado por* $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$*, usualmente referido como o "toro bidimensional".*

Observação 3.6.7. *A topologia coinduzida não torna f aberta ou fechada, necessariamente.*

Exemplo 3.6.8. *Em* $[0,1]$ *consideremos a topologia induzida da reta real e seja* $f:[0,1] \to \{0,1\}$ *a função característica de* $\left[\frac{1}{2},1\right]$*, isto é,* $f(x) = 1$*, se* $x \in \left[\frac{1}{2},1\right]$*, e* $f(x) = 0$*, se* $x \in \left[0,\frac{1}{2}\right[$*. A topologia coinduzida sobre* $\{0,1\}$ *é a topologia* $\xi = \{\emptyset,\{0\},\{0,1\}\}$*. Tem -se que:*

f não é aberta, pois $f\left(\left]\frac{2}{3},\frac{3}{4}\right[\right) = \{1\}$ *não é aberto em* $\{0,1\}$*, e*

f não é fechada, pois $f\left(\left[0,\frac{1}{3}\right]\right) = \{0\}$ *não é fechado.*

$S = \{0,1\}$ *com a topologia* $\{\emptyset,\{0\},\{0,1\}\}$ *é chamado* ***Espaço de Sierpinski****.*

Proposição 3.6.9. *Sejam* (X,σ) *e* (Y,θ) *espaços topológicos e* $f:(X,\sigma) \to (Y,\theta)$ *uma aplicação. Se f é sobrejetora, contínua e aberta (ou fechada), então* $\theta = \sigma_f$*, isto é, a topologia* θ *de Y é a coinduzida.*

Demonstração. Seja $f:(X,\sigma) \to (Y,\theta)$ contínua, sobrejetora e aberta. Considere σ_f a topologia coinduzida em Y, então σ_f é a topologia sobre Y mais fina que torna f contínua, de modo que $\theta \subseteq \sigma_f$. Por outro lado, seja $V \in \sigma_f$ um aberto na topologia coinduzida. Então, por definição de σ_f, $f^{-1}(V)$ é aberto em (X,σ) e, como f é aberta e sobrejetora, $f(f^{-1}(V)) = V$ é aberto em (Y,θ). Assim, $V \in \theta$ e $\sigma_f \subseteq \theta$. Desta forma, θ e σ_f coincidem. Se f é fechada, a prova é análoga. □

Proposição 3.6.10. *Seja* $f:(X,\sigma) \to (Y,\xi)$ *uma aplicação sobrejetora e contínua. Então:*

(i) *A relação em X, definida por* $\mathcal{R} = \{(x,y) \in X \times X:\ f(x) = f(y)\}$ *é uma relação de equivalência.*

(ii) *Se considerarmos no conjunto quociente* $X/\mathcal{R}$ *a topologia quociente* σ_q *coinduzida da aplicação quociente* $q: X \to X/\mathcal{R}$*, então existe uma única aplicação contínua* $g: X/\mathcal{R} \to Y$ *tal que* $g \circ q = f$*. Além disso, g é bijetora.*

(iii) *Se ainda f for aberta, então g é um homeomorfismo, e podemos considerar $(Y,\xi) = (X/\mathcal{R},\, \sigma_q)$, a menos de homeomorfismo.*

$$\begin{tikzcd}
 & (X/\mathcal{R},\, \sigma_q) \arrow[dd, dotted, "g"] \\
(X,\sigma) \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "f"'] & \\
 & (Y,\xi)
\end{tikzcd}$$

Demonstração. (i) Imediata.

(ii) Definimos $g : X/\mathcal{R} \to Y$ como $g([x]) = f(x)$. Temos que g está bem definida e é injetiva, pois

$$[x] = [y] \;\Leftrightarrow\; x\mathcal{R}y \;\Leftrightarrow\; f(x) = f(y) \;\Leftrightarrow\; g([x]) = g([y]).$$

Vejamos que g é contínua. Seja $U \in \xi$. Como f é contínua $f^{-1}(U) \in \sigma$. Queremos concluir que $g^{-1}(U) \in \sigma_q$, ou equivalentemente (pela definição de σ_q), que $q^{-1}(g^{-1}(U)) \in \sigma$. Mas $q^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ q)^{-1}(U) = f^{-1}(U) \in \sigma$.

Para mostrar a unicidade de g, suponhamos que g_1 e g_2 são tais que $g_1 \circ q = g_2 \circ q = f$. Então

$$g_1([x]) = g_1(q(x)) = (g_1 \circ q)(x) = (g_2 \circ q)(x) = g_2(q(x)) = g_2([x]),$$

donde segue que $g_1 = g_2$.

Por fim, g é bijetora, pois já vimos que g é injetora, e temos g que é sobrejetora, pois $g \circ q = f$ é sobrejetora (por hipótese). Consequentemente, $q = g^{-1} \circ f$.

(iii) Por (ii) temos que g é contínua, bijetora, e que $q = g^{-1} \circ f$. Resta mostrar que g^{-1} é contínua.

$$\begin{tikzcd}
 & (X/\mathcal{R},\, \sigma_q) \\
(X,\sigma) \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "f"'] & \\
 & (Y,\xi) \arrow[uu, dotted, "g^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Sabemos, pela Proposição 3.6.9, que se $f : (X,\sigma) \to (Y,\xi)$ é contínua, sobrejetora e aberta então $\xi = \sigma_f$, a topologia coinduzida por f. Seja $V \in \sigma_q$ (logo $q^{-1}(V) \in \sigma$). Temos que verificar que $g(V) = (g^{-1})^{-1}(V) \in \xi = \sigma_f$, ou seja, que $f^{-1}(g(V)) \in \sigma$. Mas isso é verdade, uma vez que $f^{-1}(g(V)) = (g^{-1} \circ f)^{-1}(V) = q^{-1}(V) \in \sigma$. $\square$

No exemplo seguinte ilustramos uma interessante consequência do resultado anterior.

Exemplo 3.6.11. *Considere em $\mathbb{R}$ a relação de equivalência $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$, e o espaço $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$*

com a topologia quociente (Exemplo 3.6.6). Então $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é homeomorfo a S^1 com a topologia usual. De fato, considere a aplicação (exponencial) $f : \mathbb{R} \to S^1$; $x \mapsto (cos2\pi x,\ sen2\pi x) \equiv e^{2\pi ix}$ e a relação $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$. Então f é contínua, sobrejetora, e $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$. Assim $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{R}/\mathcal{R}$. Pela proposição anterior existe $g : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$; $[x] \mapsto f(x)$ tal que g é contínua e bijetora. Além disso, como f é um homeomorfismo local e portanto aberta (Exemplo 3.3.9), g é um homeomorfismo entre $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e S^1.

Finalizando apresentamos duas proposições envolvendo topologia quociente. Observamos que na prova da proposição anterior, a continuidade de g, no item (ii), pode também ser concluída da Proposição 3.6.12 (abaixo) por considerar a aplicação $q : (X,\sigma) \to (X/\mathcal{R},\sigma_q)$ (em que o contradomínio $X/\mathcal{R}$ tem a topologia quociente σ_q) e usar que $g \circ q = f$ é contínua. E a continuidade de g^{-1}, no item (ii), pode der obtida da Proposição 3.6.13, por considerar a aplicação contínua e sobrejetora $f : (X,\sigma) \to (Y,\sigma_f)$ e observar que $g^{-1} \circ f = q$ e q é contínua.

Proposição 3.6.12. *Sejam $f : (X,\sigma) \to (Y,\sigma_f)$, sendo σ_f a topologia coinduzida em Y e (Z,θ) um espaço topológico. Então uma aplicação $g : (Y,\sigma_f) \to (Z,\theta)$ é contínua se, e somente se, $g \circ f : (X,\sigma) \to (Z,\theta)$ é contínua.*

$$\begin{tikzcd}
 & (Y,\sigma_f) \arrow[dd, "g"] \\
(X,\sigma) \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & \\
 & (Z,\theta)
\end{tikzcd}$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Esta implicação é imediata, pois $f : (X,\sigma) \to (Y,\sigma_f)$ é sempre contínua e composta de aplicações contínuas é contínua.

($\Leftarrow$) Suponha que $g : (Y,\sigma_f) \to (Z,\theta)$ é tal que $g \circ f$ é contínua. Se $U \subseteq Z$ é um aberto, então $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ é aberto em X. Como σ_f é a topologia coinduzida e $f^{-1}(g^{-1}(U))$ é aberto em X, segue que $g^{-1}(U) \in \sigma_f$. Assim g é contínua, pois $g^{-1}(U)$ é aberto em Y quando U é aberto em Z. □

Proposição 3.6.13. *Seja $f : (X,\sigma) \to (Y,\xi)$ uma aplicação contínua e sobrejetora. Então, $\xi = \sigma_f$ (a topologia em Y é a coinduzida por f) se, e somente se, para todo espaço topológico (Z,θ) e toda aplicação $g : (Y,\xi) \to (Z,\theta)$, a continuidade de $g \circ f$ implica a continuidade de g.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $\xi = \sigma_f$, dados (Z,θ) e $g : (Y,\sigma_f) \to (Z,\theta)$ tal que $g \circ f$ é contínua segue, da Proposição 3.6.12, que g é contínua.

($\Leftarrow$) Por hipótese, para qualquer espaço (Z,θ) e $g : (Y,\xi) \to (Z,\theta)$, a continuidade de $g \circ f$ implica a continuidade de g. Seja σ_f a topologia em Y coinduzida pela aplicação f de (X,σ) em Y, e considere $(Z,\theta) := (Y,\sigma_f)$ e $g = id : (Y,\xi) \to (Y,\sigma_f) = (Z,\theta)$. Dado que $f' = id \circ f = f : (X,\sigma) \to (Y,\sigma_f)$ é contínua (pois a topologia em Y é a coinduzida), segue, da hipótese, que $id : (Y,\xi) \to (Y,\sigma_f)$ é contínua.

$$\begin{tikzcd}
& (Y,\ \xi) \arrow[dd, "id=g"] \\
(X,\sigma) \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f'=id\circ f"'] & \\
& (Y,\sigma_f)=(Z,\theta)
\end{tikzcd}$$

Da mesma forma, $id^{-1} \circ f' = f : (X,\sigma) \to (Y,\xi)$ é contínua, sendo $id^{-1} = id : (Y,\sigma_f) \to (Y,\xi)$. Logo, como a topologia coinduzida por f' é igual a σ_f, obtemos, da proposição anterior, que id^{-1} é contínua. Assim $id : (Y,\xi) \to (Y,\sigma_f)$ é um homeomorfismo e portanto devemos ter $\xi = \sigma_f$. Deste modo, ξ é a topologia coinduzida por f em Y. $\square$

3.7 Exercícios Gerais

1) Determinar todas as aplicações contínuas do espaço (S,σ), onde $S = \{a,b,c\}$ e $\sigma = \{\emptyset,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},S\}$, no espaço de Sierpinski $(\{0,1\},\{\emptyset,\{0\},\{0,1\}\})$ (Exemplo 3.6.8).

2) Considere o espaço de Sierpinski $(S,\tau) = (\{0,1\};\{\emptyset,\{0\},S\})$. Verifique que a aplicação identidade $f : (\{0,1\},\tau) \to (\{0,1\},P(\{0,1\}); f(x) = x$, não é contínua, mas que f^{-1} é contínua.

3) Seja $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função característica de $[0,1[\subseteq \mathbb{R}$. Esta função é contínua em $x = 0$? E em $x = 1$? A restrição $c|_{[0,1[}$ é contínua?

4) Sejam X um espaço topológico e c_A a função característica de $A \subseteq X$. Mostre que $c_A : X \to \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, A é aberto e fechado em X.

5) Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma aplicação. Suponhamos $X = X_1 \cup X_2$.
a) Se as aplicações restrições $f|_{X_1}$ e $f|_{X_2}$ são contínuas em $x \in X_1 \cap X_2$ prove que f é contínua em x. (*Sugestão*: dado U aberto de Y que contém x, existem $A_1 = G_1 \cap X_1$ e $A_2 \cap X_2$, com G_1 e G_2 abertos de X tais que $f(A_i) \subseteq G$, $i = 1,2$. Tome o aberto $G = G_1 \cap G_2$ de X e use que $G = G \cap (X_1 \cup X_2) = (G \cap X_1) \cup (G \cap X_2)$ e assim $f(G) \subseteq U$.)

b) Dar um exemplo de uma aplicação $f : X \to Y$ tal que as aplicações restrições $f|_{X_1}$ e $f|_{X_2}$ são contínuas, mas f não é contínua. (*Sugestão*: tome, por exemplo em $\mathbb{R}$, X_1, X_2 tais que $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.)

6) Sejam $f : X \to Y$ uma aplicação e $A \subseteq X$. Dê um exemplo onde $f|_A$ é contínua e f é descontínua em todos os pontos. (*Sugestão*: tome $A = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ e considere a *função de Dirichlet* dada por $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = 0$ se $x \leq \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.)

7) Prove que $f : (S,\sigma) \to (T,\xi)$ é contínua se, e somente se, $f^{-1}(A^\circ) \subseteq (f^{-1}(A))^\circ$, para todo $A \subseteq T$.

8) Seja $f : (S,\sigma) \to (T,\xi)$ contínua. Mostre que $f : (S,\sigma) \to (f(S),\xi_{f(S)})$ também é contínua.

9) Seja $f : (S,\sigma) \to (T,\sigma_{dis})$ uma aplicação. Prove que f é contínua se, e somente se, S é uma reunião de abertos dois a dois disjuntos, sobre cada um dos quais f é constante.

10) Seja f uma função de um espaço topológico X no intervalo unitário $[0,1]$ com a topologia usual induzida de $\mathbb{R}$. Mostre que se $f^{-1}(\,]a,1])$ e $f^{-1}([0,b[\,)$ são abertos de X, para todos $a,b \in \,]0,1[$, então f é contínua.

11) Sejam A e B conjuntos ambos abertos ou ambos fechados em um espaço X e f uma função definida em $A \cup B$. Mostre que se f é contínua em A e f é contínua em B, então f é contínua em $A \cup B$.

12) Seja f uma função definida num espaço X. Se $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, onde $A_n \subseteq A_{n+1}$ e a função é contínua em cada um dos conjuntos A_n, então f é contínua no espaço X.

13) Dar um exemplo de função $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em cada variável separadamente, porém descontínua sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. (*Sugestão*: ver exercício seguinte.)

14) Verifique que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$ não é contínua em $(x,y) = (0,0)$. (*Sugestão*: Considere a sequência $(x_n,y_n) = (1/n,0)$ se n é par e $(x_n,y_n) = (1/n,1/n)$ se n é ímpar.)

15) Verifique que a projeção $p_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $p_1(x,y) = x$ é aberta e não é fechada. (*Sugestão*: considere $p_1(\{(x,y) : xy = 1\})$.)

16) Prove que uma função polinômial em $\mathbb{R}$ é uma aplicação fechada.

17) Verifique que uma aplicação $f : X \to Y$ é aberta se, e somente se, $f^{-1}(Fr(B)) \subseteq Fr(f^{-1}(B))$, para todo $B \subseteq Y$. (*Sugestão*: $(\Rightarrow)$ Dado $x \in f^{-1}(Fr(B))$, então $f(x) \in \overline{B} \cap \overline{B^c} = Fr(B)$, e dado U aberto tal que $x \in U$, como f é aberta, para o aberto $f(U)$, tem-se $f(U) \cap B$ e $f(U) \cap B^c$ não vazios, e assim $U \cap f^{-1}(B)$ e $U \cap f^{-1}(B^c)$ são não vazios. Disso segue que $x \in Fr(f^{-1}(B))$. $(\Leftarrow)$ Sejam U aberto de X e $B = f(U)$. Mostrar que B é aberto é equivalente a mostrar (vide Exercício 2.8 - 13) que $B \cap Fr(B) = \emptyset$. Note que se existir $y = f(x) \in B \cap Fr(B)$, com $x \in U$, então $x \in f^{-1}(Fr(B)) \subseteq Fr(f^{-1}(B))$ (pela hipótese). Logo, $U \cap f^{-1}(B^c) \neq \emptyset$, e assim existiria $u \in U$; $f(u) \in B \cap B^c$, o que é uma contradição.)

18) Seja $f : X \to Y$ uma aplicação fechada e sobrejetora. Prove que se $U \subseteq X$ é aberto, então $Fr(f(\overline{U})) \subseteq f(\overline{U}) \cap f(U^c)$.

19) Prove que, em $\mathbb{R}^2$ com a topologia usual, a bola fechada unitária de centro na origem é homeomorfa a $[0,1]\times[0,1]$.

20) Sejam $f : X \to Y$ uma aplicação e $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$. Mostre que a aplicação $g : X \to G(f)$, dada por $g(x) = (x, f(x))$, é um homeomorfismo se, e somente se, f é contínua.

21) Sejam $f : X \to Y$ um homeomorfismo e $A \subseteq X$ com a propriedade $A \cap A' = \emptyset$. Mostre que $f(A) \cap (f(A))' = \emptyset$.

22) Verifique que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$ não é aberta.

23) Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ contínuas. Mostre que, se $g \circ f : X \to Z$ é um homeomorfismo, então g injetora (ou f sobrejetora) implica que f e g são homeomorfismos.

24) Verifique que o intervalo fechado $[a,b]$ é homeomorfo ao intervalo unitário $[0,1]$, com as topologias induzidas pela topologia usual de $\mathbb{R}$.

25) Para cada $p \in \mathbb{R}$, sejam $f(p) = L_p := \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : y = px\}$ e $S = \{L_p : p \in \mathbb{R}\}$.

   a) Prove que $f : \mathbb{R} \to S$ é bijetora.

   b) Denote $(L_a, L_b) = \{L_p \in S : a < p < b\}$. Represente graficamente (L_{-1}, L_1) e $f^{-1}(L_{-1}, L_1)$.

   c) Seja $\sigma = \{G \subseteq S : f^{-1}(G) \in \xi\}$, onde ξ é a topologia usual de $\mathbb{R}$. Mostre que σ é uma topologia em S.

   d) Verifique que $(\mathbb{R}, \xi)$ e (S, σ) são homeomorfos.

26) O conjunto de todas as sequências de números naturais forma um espaço métrico tomando como distância entre as sequências distintas $x = (x_1, x_2, \ldots)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots)$ o número $1/r$, onde r é o primeiro índice tal que $x_r \neq y_r$. Mostre que este espaço métrico é homeomorfo ao conjunto dos números irracionais do intervalo $[0,1]$ com a topologia induzida pela topologia usual de $\mathbb{R}$. (*Sugestão*: Associe a fração contínua $\dfrac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{\ddots}}}}$ à sequência de números naturais $x = (n_1, n_2, \ldots)$.)

27) Mostre que a área de uma região plana não é uma propriedade topológica, ou seja, a área não é preservada por homeomorfismos (entre subespaços de $\mathbb{R}^2$).

28) Mostre que a topologia em $\mathbb{R}$ induzida pela família composta de todas as funções lineares $f : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \sigma_{usual})$, tal que $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, é a topologia usual.

29) Se $f : S \to T$ é uma aplicação bijetora e T um espaço topológico, então a topologia induzida por f sobre S torna f um homeomorfismo.

30) Seja $f : S \to T$ uma aplicação sobrejetora. Se (T, ξ) é um espaço de Lindelof prove que S, com a topologia induzida por f, é também um espaço de Lindelöf.

31) Sejam S e T espaços topológicos, $\mathcal{R}$ uma relação de equivalência em S e $q : S \to S/\mathcal{R}$ a projeção canônica ao quociente. Prove que uma aplicação sobrejetora $f : S/\mathcal{R} \to T$ é contínua se, e somente se, $f \circ q : S \to T$ é contínua.

32) Mostre que o espaço quociente obtido de $I = [0,\ 1]$ identificando-se 0 com 1 é homeomorfo a S^1.

33) Usando a aplicação "exponencial" de $\mathbb{R}^2$ em $S^1 \times S^1$, mostre que (o toro bidimensional) $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ é homeomorfo a $S^1 \times S^1$ (considerando $\mathbb{R}^2$ e $S^1 \times S^1$ com a topologia usual).

34) O espaço quociente obtido de $I \times I$ identificando-se $(0,t)$ com $(1,t)$ e $(t,0)$ com $(t,1)$, para todo $t \in [0,1]$, é o toro T. Verifique que T é homeomorfo a $S^1 \times S^1$.

35) Seja S um espaço topológico. Prove que se A é um espaço quociente de S, isto é, $A = S/\mathcal{R}$, onde $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência em S, e B é um espaço quociente de A, então B é homeomorfo a um espaço quociente de S.

36) Mostre que a projeção ao quociente em geral não é uma aplicação aberta. (*Sugestão*: particione $\mathbb{R}$ (com a topologia usual) em duas classes de equivalência $]-\infty, 0]$ e $]0, +\infty[$ e verifique que a imagem do aberto $]-\infty, 0[$ não será um aberto de $\mathbb{R}/\sim$.)

Capítulo 4

Compacidade

"Não devo imaginar que não concebo o infinito por uma verdadeira idéia, mas somente pela negação do que é finito."

(René Descartes - Meditação)

4.1 Espaços Compactos

Lembramos que, dados (S,σ) um espaço topológico e $X \subseteq S$, uma cobertura aberta de X é uma família $\mathcal{C} = \{G_\lambda\}_{\lambda \in L}$ de abertos de S cuja reunião contém X, isto é, $X \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} G_\lambda$. Uma subcobertura é uma subfamília de $\mathcal{C}' = \{G_\lambda\}_{\lambda \in L'}$, $L' \subseteq L$, que também é uma cobertura de X. (Note que para $X = S$ tem-se a igualdade $S = \bigcup_{\lambda \in L} G_\lambda$).

Definição 4.1.1. *Um espaço topológico (S,σ) é **compacto** se toda cobertura aberta de S admite uma subcobertura finita, isto é, se $S = \bigcup_{\lambda \in L} G_\lambda$, com $G_\lambda \in \sigma$, então existem índices $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ tais que $S = G_{\lambda_1} \cup \cdots \cup G_{\lambda_m}$.*

Definição 4.1.2. *Sejam (S,σ) um espaço topológico e $K \subseteq S$. K é um **subconjunto compacto** de S se o subespaço (K,σ_K) é compacto (i.é, $K = \bigcup_{\lambda \in L} U_\lambda,\ U_\lambda = G_\lambda \cap K,\ G_\lambda \in \sigma \ \Rightarrow\ \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tais que $K = U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_n}$).*

Observação 4.1.3. $i)$ *Um espaço topológico (S,σ) é compacto se, e somente se, para toda família $\mathcal{A} = \{G_\lambda\}_{\lambda \in L}$ de abertos de S que não possui uma subfamília finita que cobre S, necessariamente $\mathcal{A}$ também não cobre S.*

$ii)$ *$K \subseteq S$ é compacto se, e somente se, toda cobertura aberta de K por abertos de S admite subcobertura finita. Isto é, se $K \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} G_\lambda$ com $G_\lambda \in \sigma$, então existem índices $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tais que $K \subseteq G_{\lambda_1} \cup \cdots \cup G_{\lambda_n}$.*
A justificativa é deixada como exercício.

Exemplo 4.1.4. 1) *Se (S,σ) é um espaço topológico com S finito, então S é compacto.*

2) $(S,\ \sigma_{dis} = \mathcal{P}(S))$ *é compacto se, e somente se, S é finito.*

3) *Dado* $S \neq \emptyset$, (S, σ_{cao}) *é compacto, sendo* σ_{cao} *a topologia caótica.*

4) *Seja S um conjunto infinito.* (S, σ_{cof}) *é compacto, pois se* $S = \bigcup_{\lambda \in L} G_\lambda$, *com* $G_\lambda \in \sigma_{cof}$, *então existe* $\lambda_0 \in L$ *tal que* $G_{\lambda_0} = S - \{a_1, ..., a_k\}$, *com* $a_i \in S$, $i = 1, ..., k$. *Tome* G_{λ_i}, $\lambda_i \in L$ *tal que* $a_i \in G_{\lambda_i}$, $i = 1, ..., k$. *Então* $S = G_{\lambda_0} \cup G_{\lambda_1} \cup \cdots \cup G_{\lambda_k}$.

5) $(\mathbb{R}, \sigma_{usual})$ *não é compacto, pois, por exemplo, a cobertura* $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \,]n, n+2[$ *não admite subcobertura finita.*

6) $(]0,1[\,, \sigma_{usual})$ *não é compacto. De fato, a cobertura* $]0,1[\, = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \,]1/n, 1[$ *não admite subcobertura finita.*

Observação 4.1.5.

$i)$ *Todo espaço compacto* (S, σ) *é, claramente, um espaço de Lindelöf (Definição 2.6.8).*

$ii)$ $(\mathbb{Z}, \sigma_{dis})$ *é de Lindelöf, mas não é compacto.*

Veremos a seguir algumas propriedades gerais dos espaços compactos.

Proposição 4.1.6. *Subconjunto fechado de um espaço topológico compacto é compacto.*

Demonstração. Sejam (S, σ) um espaço topológico compacto e $F \subseteq S$ um subconjunto fechado. Se $F = \bigcup_{\lambda \in L} U_\lambda$, $U_\lambda \in \sigma_F$, então existe $G_\lambda \in \sigma$ tal que $U_\lambda = G_\lambda \cap F$, de modo que $F \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} G_\lambda$. Como F é fechado, $F^c = S - F$ é aberto. Assim $S = (\bigcup_{\lambda \in L} G_\lambda) \cup F^c$ é uma cobertura aberta de S. Sendo S é compacto, tal cobertura admite uma subcobertura finita, digamos $S = (\bigcup_{i=1}^{n} G_{\lambda_i}) \cup F^c$. Logo, $F = \bigcup_{i=1}^{n} (G_{\lambda_i} \cap F) = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}$ e (F, σ_F) é compacto. □

Observação 4.1.7. $i)$ *Sejam* (S, σ) *um espaço topológico compacto e* (T, ξ) *um espaço topológico tal que* $S \subseteq T$ *e* $\sigma = \xi_S$. *Então S é compacto como subconjunto de T. Isto segue diretamente da definição.*

$ii)$ *Podemos ter* $K \subseteq S$, *com K compacto e não fechado. Tome, por exemplo,* $K = \,]0,1]$ *em* $(\mathbb{R}, \sigma_{cof})$.

Proposição 4.1.8. *Se S é um espaço topológico de Hausdorff e* $K \subseteq S$ *é um subconjunto compacto, então K é fechado.*

Demonstração. Seja $x \in K^c$. Como S é de Hausdorff, para todo $y \in K$ existem abertos G_y e H_y de S tais que $x \in G_y$, $y \in H_y$ e $G_y \cap H_y = \emptyset$. Então $K \subseteq \bigcup_{y \in K} H_y$ é uma cobertura aberta de K (por abertos de S). Sendo K compacto, existem $y_1, y_2, \ldots, y_n \in K$ tais que $K \subseteq H_{y_1} \cup \cdots \cup H_{y_n}$. Considere $G = \bigcap_{i=1}^{n} G_{y\,i} \in \sigma$, então $x \in G$ e $G \cap K = \emptyset$. De modo que $G \subseteq K^c$, mostrando que K^c é aberto e portanto K é fechado. □

Corolário 4.1.9. *Sejam* (M, d) *um espaço métrico e* $K \subset M$. *Se K compacto então K é fechado.*

As duas proposições anteriores auxiliam na caracterização dos compactos de $\mathbb{R}$ com a topologia usual.

Proposição 4.1.10 (Teorema de Heine-Borel)**.** *Todo subconjunto fechado e limitado de* $(\mathbb{R}, \sigma_{usual})$ *é compacto.*

Demonstração. Primeiro mostraremos que $[a,b]$, $a < b$, $a,b \in \mathbb{R}$ é compacto. De fato, seja $\mathcal{C}$ uma cobertura aberta de $[a,b]$. Podemos supor que a cobertura é formada por intervalos abertos (abertos básicos). Considere

$$A = \{x \in [a,b], \text{ tal que uma subcobertura finita de } \mathcal{C} \text{ cobre } [a,x]\}.$$

Deste modo $a \in A$ e b é um limite superior de A. Assim existe $c = \sup A$, $a \leq c \leq b$. Ainda, se $x \in A$, $a < x' < x$, então $x' \in A$. Logo A é um intervalo da forma $[a,c[$ ou $[a,c]$. Mostremos que $c \in A$ (de modo que $A = [a,c]$) e depois que $c = b$. Com efeito, seja $G \in \mathcal{C}$ tal que $c \in G$. Tome $x_0 \in G$ com $a < x_0 < c$. Então $x_0 \in A$ visto que $c = \sup A$, assim existe uma subcobertura finita $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ que cobre $[a,x_0]$, e então a subcobertura finita $\mathcal{C}' \cup \{G\}$ cobre $[a,c]$ e $c \in A$. Vejamos que $c = b$. Se $c < b$, existe $x_1 \in G$ (mesmo G) tal que $c < x_1 < b$ e $[c,x_1] \subseteq G$. Daí, $\mathcal{C}' \cup \{G\}$ cobre $[a,x_1]$. Isto implica que $x_1 \in A$ $x_1 > c$, contradizendo o fato que $c = \sup A$. Portanto $c = b$, $A = [a,b]$ e $[a,b]$ é compacto.

Para concluir a prova da proposição, seja $F \subseteq \mathbb{R}$, F fechado e limitado. Então existem $a,b \in \mathbb{R}$ tais que $F \subseteq [a,b]$. Como visto anteriormente, $[a,b]$ é compacto, daí F é compacto, pois fechado num compacto é compacto (Proposição 4.1.6). □

Proposição 4.1.11. *Um subconjunto* $K \subseteq \mathbb{R}$ *(com a topologia* σ_{usual}*) é compacto se, e somente se, é fechado e limitado.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Como $\mathbb{R}$ é um espaço de Hausdorff e $K \subseteq \mathbb{R}$ é compacto, pela Proposição 4.1.8, K é fechado. Além disso, $K \subseteq \mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}]-n,n[$ é uma cobertura aberta de K. Como K é compacto, existe subcobertura finita $K \subseteq \ ]-n_1,n_1[\ \cup \cdots \cup \ ]-n_r,n_r[$. Tomando $a = \max \{n_i : i = 1,2,\ldots,r\}$, temos $F \subseteq \ ]-a,a[$, donde segue que K é limitado.

$(\Leftarrow)$ Já foi provado na proposição anterior. □

Proposição 4.1.12. *Imagem contínua de um compacto é compacto, isto é, se* $f : (S,\sigma) \to (T,\xi)$ *é contínua e* (S,σ) *é compacto, então* $(f(S),\xi_{f(S)})$ *é compacto.*

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor que f é sobrejetora. Nestas condições, seja $T = \bigcup_{\lambda \in L} V_\lambda$ uma cobertura aberta de T. Então $S = f^{-1}(T) = f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in L} V_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in L} f^{-1}(V_\lambda)$ e $\{f^{-1}(V_\lambda)\}_{\lambda \in L}$ é uma cobertura aberta de S que é compacto, logo admite uma subcobertura finita, digamos $S = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(V_{\lambda_i})$. Assim $T = f(S) = \bigcup_{i=1}^{n} V_{\lambda_i}$. Portanto T é compacto. □

Corolário 4.1.13. *Compacidade é uma propriedade topológica.*

Corolário 4.1.14. *Quociente de um compacto é compacto, isto é, se* (S,σ) *é compacto e* $\mathcal{R}$ *é uma relação de equivalência sobre S, então* $(S/\mathcal{R},\sigma_q)$ *é compacto.*

Demonstração. A aplicação quociente $q : S \to S/\mathcal{R}$ é contínua e sobrejetora. □

Definição 4.1.15. *Dizemos que um espaço topológico S tem a* ***Propriedade de Bolzano-Weierstrass*** *se todo subconjunto infinito de S tem um ponto de acumulação.*

Proposição 4.1.16. *Em um espaço topológico compacto todo subconjunto infinito tem um ponto de acumulação. Ou seja, espaços compactos tem a Propriedade de Bolzano-Weierstrass.*

Demonstração. Seja S um espaço topológico compacto e $A \subseteq S$. Vamos mostrar que $A' = \emptyset$ implica que A é finito. De fato, se o conjunto dos pontos de acumulação $A' = \emptyset$ então $\overline{A} = A \bigcup A' = A$ e assim A é fechado. A sendo fechado em S e S compacto, segue que A é compacto. Para cada $a \in A$, o fato de a não estar em A' implica que existe U_a aberto em S contendo a tal que $(U_a - \{a\}) \bigcap A = \emptyset$, de modo que $U_a \bigcap A \subseteq \{a\}$. Sendo A compacto, e $A \subseteq \bigcup_{a\in A} U_a$, existem $a_1, a_2, ..., a_r$ tais que $A \subseteq U_{a_1} \cup U_{a_2} \cup ... \cup U_{a_r}$ e assim, $A = (A \cap U_{a_1}) \cup (A \cap U_{a_2}) \cup ... \cup (A \cap U_{a_r}) \subseteq \{a_1, a_2, ..., a_r\}$, de modo que A é finito. □

Definição 4.1.17. *Seja S um conjunto não vazio. Dizemos que uma família $\mathfrak{F} = \{V_\lambda, \lambda \in L\}$ de subconjuntos de S tem a* ***Propriedade da Interseção Finita*** *(**PIF**) se toda subfamília finita dela tem interseção não vazia.*

Exemplo 4.1.18. *Em $]0,1]$, a família $\mathfrak{F} = \{F_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$, com $F_n =]0, 1/n]$, tem a PIF (Propriedade de Interseção Finita).*

Proposição 4.1.19. *Um espaço topológico (S, σ) é compacto se, e somente se, toda família de fechados de S com a PIF tem interseção não vazia.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponhamos por absurdo que $\mathfrak{F} = \{F_\lambda\}_{\lambda\in L}$ seja uma família de fechados de S com a PIF tal que $\bigcap_{\lambda\in L} F_\lambda = \emptyset$. Então $S = \emptyset^{\,c} = \left(\bigcap_{\lambda\in L} F_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in L} F_\lambda^c$. Assim $\{F_\lambda^c\}_{\lambda\in L}$ é uma cobertura aberta de S, e como S é compacto, admite uma subcobertura finita, ou seja, $S = \bigcup_{i=1}^n F_{\lambda_i}^c = \left(\bigcap_{i=1}^n F_{\lambda_i}\right)^c$ e em consequência, $\bigcap_{i=1}^n F_{\lambda_i} = \emptyset$. Logo a subfamília finita $\{F_{\lambda_i}\}_{i=1}^n$ tem interseção vazia, e assim a família $\{F_\lambda\}_{\lambda\in L}$ não tem a PIF, absurdo! Desta forma, toda família de fechados num espaço compacto com a PIF tem interseção não vazia.

$(\Leftarrow)$ Suponhamos agora que toda família de fechados de S com a PIF tem interseção não vazia. Seja $\{G_\lambda\}_{\lambda\in L}$ uma cobertura aberta de S. Então $\emptyset = S^c = \left(\bigcup_{\lambda\in L} G_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in L} G_\lambda^c$, e $\{G_\lambda^c\}_{\lambda\in L}$ é uma família de fechados com interseção vazia. Consequentemente, segue da hipótese que esta família $\{G_\lambda^c\}_{\lambda\in L}$ de fechados em S não tem a PIF, logo existe uma subfamília finita com interseção vazia, digamos $\bigcap_{i=1}^n G_{\lambda_i}^c = \emptyset$. Assim, $S = \bigcup_{i=1}^n G_{\lambda_i}$ e, em consequência, a cobertura aberta $\{G_\lambda\}_{\lambda\in L}$ admite uma subcobertura finita. Portanto (S, σ) é compacto. □

Exemplo 4.1.20. *Em $]0,1]$ com a topologia usual, a família de fechados $\mathfrak{F} = \{F_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ com $F_n =]0, 1/n]$ tem a PIF (exemplo anterior), mas $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} F_n = \emptyset$ e assim $]0,1]$ não é compacto. Similarmente, $\mathfrak{F} = \{F_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ com $F_n := [1-(1/n), 1[$ é uma classe de fechados em $[0,1[$, que tem a PIF, mas $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} F_n = \emptyset$. Logo $[0,1[$ não é compacto.*

Corolário 4.1.21. *Um espaço topológico (S,σ) é compacto se, e somente se, toda família de fechados de S com interseção vazia tem uma subfamília finita com interseção vazia.*

Demonstração. Segue da proposição anterior, visto que um espaço topológico (S,σ) é compacto se, e somente se, toda família de fechados de S com interseção vazia não pode satisfazer PIF, o que é equivalente a ter uma subfamília finita com interseção vazia. $\square$

As próximas duas proposições vêm simplificar a verificação de que um espaço é compacto, no sentido que podemos trabalhar com coberturas abertas formadas apenas por abertos básicos ou sub-básicos. A primeira é bastante imediata enquanto a segunda é delicada pela própria natureza de sua formulação, ela requer o Lema de Zorn (Lema 1.9.8).

Proposição 4.1.22. *Um espaço topológico (S,σ) é compacto se, e somente se, toda cobertura aberta de S por abertos de uma base para a topologia σ tem uma subcobertura finita.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Imediata.

$(\Leftarrow)$ Seja $S = \bigcup_\lambda G_\lambda$ uma cobertura aberta de S e $\mathfrak{B} = \{B_\mu\}_\mu$ uma base para (S,σ). Assim, para cada $x \in S$, existe $G_\lambda \in \sigma$ tal que $x \in G_\lambda$ e para cada par (x, G_λ) existe $B_{\mu(x)} \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B_{\mu(x)} \subseteq G_\lambda$. Daí,

$$S = \bigcup_{x\in S} B_{\mu(x)}$$

é uma cobertura aberta de S por abertos básicos. Por hipótese, tal cobertura admite uma subcobertura finita, de modo que

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} B_{\mu(x_i)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_{\lambda_i} \ \Rightarrow\ S = \bigcup_{i=1}^{n} G_{\lambda_i},$$

onde cada G_{λ_i} é tal que é tal que $B_{\mu(x_i)} \subseteq G_{\lambda_i}$ (podendo ter $\lambda_i = \lambda_j$, com $i \neq j$). Logo a cobertura $\{G_\lambda\}_\lambda$ de S admite subcobertura finita. Portanto (S,σ) é compacto. $\square$

Para a prova do próximo resultado usaremos, como já observado anteriormente, o Lema de Zorn (Lema 1.9.8).

Proposição 4.1.23 (Teorema de Alexander)**.** *Seja (S,σ) um espaço topológico. Então (S,σ) é compacto se, e somente se, toda cobertura aberta de S por abertos de uma sub-base de σ admite uma subcobertura finita.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ É imediata.

$(\Leftarrow)$ Seja $\mathfrak{S} \subseteq \sigma$ uma sub-base para a topologia σ satisfazendo a condição da hipótese. *Suponhamos que uma família $\mathcal{F} \subseteq \sigma$ seja tal que nenhuma subfamília finita de $\mathcal{F}$ cobre S. Vamos mostrar que $\mathcal{F}$ não é uma cobertura de S. Assim, toda cobertura aberta de S admite uma subcobertura finita e portanto S é compacto.* Seja

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{F}' \subseteq \sigma : \ \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}' \text{ e nenhuma subfamília finita de } \mathcal{F}' \text{ cobre } S\}.$$

Claramente $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ e $\mathcal{C}$ é parcialmente ordenado pela inclusão. Note que se $\mathcal{F}'' \subseteq \sigma$ é tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}''$, mas $\mathcal{F}'' \notin \mathcal{C}$, então existe uma subfamília finita de $\mathcal{F}''$ que cobre S.

A prova consistirá, essencialmente, em dois passos principais:

1^o) mostrar que todo subconjunto totalmente ordenado (cadeia) de $\mathcal{C}$ tem um limite superior, e consequentemente, pelo Lema de Zorn (Lema 1.9.8), $\mathcal{C}$ tem um elemento maximal $\mathcal{M}$;

2^o) que $\mathcal{M}$ não cobre S, donde seguirá que $\mathcal{F}$ não cobre S (pois $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}$, visto que $\mathcal{M} \in \mathcal{C}$).

1^o) Seja então $\mathcal{C}_1 = \{\mathcal{F}_\alpha : \alpha \in L\}$ um subconjunto não vazio totalmente ordenado (cadeia) de $\mathcal{C}$, isto é, dados $\mathcal{F}_\alpha$ e $\mathcal{F}_\beta$ em $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{F}_\beta$ ou $\mathcal{F}_\beta \subseteq \mathcal{F}_\alpha$ e considere

$$\mathcal{U} := \bigcup_{\alpha \in L} \mathcal{F}_\alpha.$$

Então, obviamente $\mathcal{U}$ é um limite superior de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{C}$, pois $\mathcal{U} \subseteq \sigma$, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ e, se alguma subfamília finita de $\mathcal{U}$ cobrir S, por exemplo, $S = \bigcup_{i=1}^n G_{\lambda_i}$, $G_{\lambda_i} \in \mathcal{U}$, como $\mathcal{C}_1$ é cadeia, deve existir $\alpha_0 \in L$ tal que $G_{\lambda_i} \in \mathcal{F}_{\alpha_0}$, para todo $i = 1, ..., n$. Assim a subfamília finita $\{G_{\lambda_1}, ..., G_{\lambda_n}\}$ de $\mathcal{F}_{\alpha_0} \in \mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}$ cobre S, o que é uma contradição. Logo nenhuma subfamília finita de $\mathcal{U}$ cobre S e então $\mathcal{U} \in \mathcal{C}$.

Deste modo $\mathcal{C}$ é parcialmente ordenado e toda cadeia em $\mathcal{C}$ tem um limite superior. Aplicando o Lema de Zorn para $\mathcal{C}$, segue que $\mathcal{C}$ tem um elemento maximal $\mathcal{M}$, ou seja $\mathcal{M} \in \mathcal{C}$ (de modo que $\mathcal{M} \subseteq \sigma$, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}$ e nenhuma subfamília finita de $\mathcal{M}$ cobre S), e não existe $\mathcal{M}' \in \mathcal{C}$, $\mathcal{M}' \neq \mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$.

2^o) Mostremos que $\mathcal{M}$ não cobre S.

Seja $M \in \mathcal{M}$ (logo $M \in \sigma$). Para cada $x \in M$, como $\mathfrak{S}$ é sub-base para σ, existe $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\} \subseteq \mathfrak{S} \subseteq \sigma$ tal que $x \in B = \bigcap_{i=1}^n H_i \subseteq M$.

Afirmamos que $H_i \in \mathcal{M}$, para algum i. De fato, suponhamos, por absurdo, que $H_i \notin \mathcal{M}$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Como $\mathcal{M}$ é elemento maximal de $\mathcal{C}$ e para cada i, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M} \cup \{H_i\}$, segue que $\mathcal{M} \cup \{H_i\}$ não pertence a $\mathcal{C}$ e assim alguma subfamília finita $\mathcal{M}_i \cup \{H_i\}$ de $\mathcal{M} \cup \{H_i\}$ cobre S, onde $\mathcal{M}_i = \{M_{i_1}, \ldots, M_{i_{n_i}}\}$ indica a subfamília finita de $\mathcal{M}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Consequentemente,

$$\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{M}_n \cup \left\{ \bigcap_{i=1}^n H_i \right\}$$

cobre S, pois dado $a \in S$, se a não pertence a nenhum elemento de $\mathcal{M}_i$, para $i = 1, ..., n$, necessariamente $a \in H_i$, para todo $i = 1, ..., n$, visto que $\mathcal{M}_i \cup \{H_i\}$ cobre S, e portanto $a \in \bigcap_{i=1}^n H_i$. Agora, como $\bigcap_{i=1}^n H_i \subseteq M$, segue que

$$\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{M}_n \cup \{M\}$$

também cobre S, e assim $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{M}_n \cup \{M\}$ é uma subfamília finita de $\mathcal{M}$ que cobre S, o que é absurdo, pois $\mathcal{M} \in \mathcal{C}$.

Portanto, dado $x \in M$, existe algum $H_i \in \mathfrak{S}$, com $x \in H_i$, tal que $H_i \in \mathcal{M}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Vamos denotar tal H_i por H_x.

Assim, para cada $x \in M$, existe $H_x \in \mathfrak{S}$ (aberto sub-básico) tal que $x \in H_x \in \mathcal{M}$.

Temos então que $M \subseteq \bigcup_{x \in M} H_x$, com $H_x \in \mathfrak{S} \cap \mathcal{M}$.

Daí, se $\mathcal{M} = \{M : M \in \mathcal{M}\}$ cobre S, então $S = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M \subseteq \bigcup_{M \in \mathcal{M}} (\bigcup_{x \in M} H_x)$, de modo que a família de elementos sub-básicos $\{H_x;\ H_x \in \mathfrak{S} \cap \mathcal{M},\ x \in M,\ M \in \mathcal{M}\}$ também cobre S. Pela hipótese, existirá uma subfamília finita desses elementos $\{H_{x_1}, \ldots, H_{x_k}\}$ que cobrirá S. Como $H_{x_i} \in \mathcal{M}$, teríamos uma subfamília finita de elementos de $\mathcal{M}$ cobrindo S, o que é uma contradição, visto que $\mathcal{M} \in \mathcal{C}$.

Portanto $\mathcal{M}$ *não* cobre S, e o resultado segue. □

O teorema seguinte é um caso particular (se consideramos o produto cartesiano de um número finito de espaços) do Teorema de Tychonoff (a ser provado mais tarde) que afirma que o produto de uma família qualquer de espaços compactos (com a topologia produto) é compacto. Apresentaremos duas demonstrações para o caso do produto de dois espaços (o caso de um número finito segue por indução), uma delas usa o Teorema de Alexander e a outra usa a caracterização da compacidade pela Propriedade da Interseção Finita (PIF). A demonstração usando o Teorema de Alexander se estende literalmente para um produto qualquer de espaços, como veremos na seção seguinte.

Proposição 4.1.24. *O produto cartesiano de dois espaços topológicos compactos* (*com a topologia produto*) *é compacto.*

1ª Demonstração. (Usando sub-base/Teorema de Alexander) Sejam (S, σ_S) e (T, σ_T) espaços topológicos compactos. Tomemos a sub-base

$$\mathfrak{S} = \{A_\lambda \times T :\ A_\lambda \in \sigma_S\} \cup \{S \times B_\mu :\ B_\mu \in \sigma_T\}$$

para a topologia produto de $S \times T$. Suponhamos que uma família de abertos sub-básicos $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{S}$ é tal que nenhuma subfamília finita de $\mathcal{F}$ cobre $S \times T$. Mostremos que isto implica que $\mathcal{F}$ não é uma cobertura de $S \times T$, e assim o resultado seguirá pelo Teorema de Alexander.

De fato, sejam $\mathcal{F}_S = \{A_\lambda \in \sigma_S :\ A_\lambda \times T \in \mathcal{F}\}$ e $\mathcal{F}_T = \{B_\mu \in \sigma_T :\ S \times B_\mu \in \mathcal{F}\}$.
Nenhuma subfamília finita de $\mathcal{F}_S$ cobre S, pois

$$S \subseteq A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n},\ A_{\lambda_i} \in \mathcal{F}_S \Rightarrow S \times T \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (A_{\lambda_i} \times T),\ A_{\lambda_i} \times T \in \mathcal{F},$$

o que é absurdo. Assim, como S é compacto, $\mathcal{F}_S$ não é cobertura de S e, portanto, existe $x_0 \in S$, $x_0 \in \left(\bigcup_{A_\lambda \in \mathcal{F}_S} A_\lambda\right)^c = S - (\bigcup_{A_\lambda \in \mathcal{F}_S} A_\lambda)$. De modo análogo, conclui-se que $\mathcal{F}_T$ não cobre T e, portanto, existe $y_0 \in T$, $y_0 \in \left(\bigcup_{B_\mu \in \mathcal{F}_T} B_\mu\right)^c$. Daí, existe $(x_0, y_0) \in S \times T$ tal que $(x_0, y_0) \notin \bigcup_{V \in \mathcal{F}} V$. Deste modo $\mathcal{F}$ não é cobertura aberta de $S \times T$, o que conclui a prova. □

Para a *segunda demonstração* da proposição anterior (usando PIF) é necessário o resultado seguinte, referido às vezes como *Lema do Tubo*:

Lema 4.1.25. *Seja $S\times T$ o produto cartesiano de um espaço topológico S por um espaço compacto T e considere em $S\times T$ a topologia produto.*

(i) *Se $x_0 \in S$ e W é um aberto em $S\times T$ tal que $\{x_0\}\times T\subseteq W$, então existe um aberto $U\subseteq S$ com $x_0\in U$ e $U\times T\subseteq W$.*

(ii) *A projeção $p_1 : S\times T\to S;\ p_1(x,y)=x$, é uma aplicação fechada.*

Demonstração.

(i) Temos que $\{x_0\}\times T$ é compacto, pois $\{x_0\}\times T$ é homeomorfo a T e T é compacto. Como W é um aberto contendo $\{x_0\}\times T$, para cada $y\in T$, existe um aberto básico $A_y\times B_y$ de $S\times T$ com $(x_0,y)\in A_y\times B_y\ \subseteq W$ e então, da compacidade de $\{x_0\}\times T$, segue que $\{x_0\}\times T\ \subseteq\ \bigcup_{i=1,\dots,n} A_{y_i}\times B_{y_i}$. Tome o aberto $U=\bigcap_{i=1,\dots,\,n} A_{y\ i}$ contendo x_0. Então $U\times T\subseteq \bigcup_{i=1,\dots,n} A_{y\ i}\times B_{y\ i}\ \subseteq W$, pois dado $(u,y)\in U\times T$, $u\in A_{y\ i}$, para todo i. Por outro lado, $(x_0,y)\in A_{y_j}\times B_{y_j}$ para algum $j=1,\cdots,n$ e assim, $(u,y)\in A_{y_j}\times B_{y_j}\subseteq W$.

(ii) Seja $F\subseteq S\times T$ um fechado, temos que provar que $p_1(F)$ é um fechado de S. Tome um elemento qualquer $x\in p_1(F)^{\ c}=S-p_1(F)$. Então $(x,y)\notin F$, para todo $y\in T$. Assim $\{x\}\times T\subseteq W:=F^c$, que é um aberto em $S\times T$. Por (i), existe um aberto $U\subseteq S$ tal que $x\in U$ e $U\times T\subseteq W=F^c$ e, portanto, $(U\times T)\cap F=\emptyset$. Disto segue que $U\cap p_1(F)=\emptyset$ (pois $a\in U$ e $a\in p_1(F)$ implica $(a,y)\in(U\times T)\cap F$ para algum y, o que nos dá uma contradição), em consequência, $x\in U\subseteq p_1(F)^c$. Logo $p_1(F)^c$ é aberto em S e p_1 é uma aplicação fechada. □

2ª Demonstração (*da Proposição 4.1.24*). Seja $\mathfrak{F}=\{F_\lambda\}_{\lambda\in L}$ uma família qualquer de fechados em $S\times T$ com a PIF. Mostremos que

$$\bigcap_{\lambda\in L} F_\lambda\neq\emptyset.$$

Note que podemos acrescentar à família $\mathfrak{F}$ todas as interseções finitas $F_{\lambda_1}\cap\cdots\cap F_{\lambda_n}$, onde $\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}$ são subconjuntos finitos de L, de modo a obter uma nova família $\{F'_k : k\in L'\}$ que ainda tem a PIF e, obviamente,

$$\bigcap_{k\in L'} F'_k\neq\emptyset\ \Rightarrow\ \bigcap_{k\in L} F_k\neq\emptyset.$$

Assim podemos supor que $\mathfrak{F}=\{F_\lambda\}_{\lambda\in L}$ é “fechada com relação a interseção finita”, isto é, se $F_{\lambda_1},\dots,F_{\lambda_k}\in\mathfrak{F}$ então $F_{\lambda_1}\cap\cdots\cap F_{\lambda_n}=F_\lambda\in\mathfrak{F}$, para algum λ. Considerando a projeção $p_1:S\times T\to S$, como T é compacto, segue do lema anterior, que $\{p_1(F_\lambda)\}_{\lambda\in L}$ é uma família de fechados em S, e que tem a PIF, pois

$$p_1(F_{\lambda_1})\cap p_1(F_{\lambda_2})\cap\cdots\cap p_1(F_{\lambda_n})\ \supseteq\ p_1(F_{\lambda_1}\cap\cdots\cap F_{\lambda_n})\neq\emptyset.$$

Como S também é compacto, existe $x_0 \in \bigcap_{\lambda \in L} p_1(F_\lambda)$. Logo $x_0 \in p_1(F_\lambda)$, para cada $\lambda \in L$, e então

$$F_\lambda \cap (\{x_0\} \times T) \neq \emptyset,$$

pois, para cada λ existirá um $y_\lambda \in T$ tal que $(x_0, y_\lambda) \in F_\lambda$. A família $\{F_\lambda \cap (\{x_0\} \times T)\}_{\lambda \in L}$ é uma família de fechados em $\{x_0\} \times T$, com a PIF. Esta última afirmação segue do fato que

$$(F_{\lambda_1} \cap (\{x_0\} \times T)) \cap \cdots \cap (F_{\lambda_m} \cap (\{x_0\} \times T)) = \emptyset \Rightarrow (F_{\lambda_1} \cap \cdots \cap F_{\lambda_m}) \cap (\{x_0\} \times T) = \emptyset,$$

o que é um absurdo, visto que $F_{\lambda_1} \cap \cdots \cap F_{\lambda_m} = F_{\lambda_0}$ para algum $\lambda_0 \in L$ (porque a família $\{F_\lambda\}_{\lambda \in L}$ é fechada em relação a interseção finita) e $F_\lambda \cap (\{x_0\} \times T) \neq \emptyset$, para todo λ.

Como $\{x_0\} \times T$ é compacto (pois por hipótese T é compacto) existe, pela Proposição 4.1.19, $(x_0, y_0) \in \bigcap_{\lambda \in L} (F_\lambda \cap (\{x_0\} \times T))$. Deste modo $(x_0, y_0) \in F_\lambda$, para todo $\lambda \in L$, e portanto $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda \neq \emptyset$, como queríamos mostrar. □

Corolário 4.1.26. *O produto cartesiano de um número finito de espaços topológicos compactos é compacto. Em particular,* $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$, a_i, $b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$ *é compacto em* $\mathbb{R}^n$ (*com a topologia usual*).

Demonstração. Segue por indução, a partir da Proposição 4.1.24. □

Compactos no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$: Já caracterizamos os compactos de $\mathbb{R}$ (Proposição 4.1.11). Queremos caracterizar, mais geralmente, os subconjuntos compactos do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Proposição 4.1.27. *Um subconjunto do espaço de* $\mathbb{R}^n$ (*com a topologia usual*) *é compacto se, e somente se, é fechado e limitado.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $K \subseteq \mathbb{R}^n$ um compacto. Como $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Hausdorff, segue da Proposição 4.1.8 que K é fechado. Agora, para mostrar que K é limitado, tomemos a cobertura aberta $K \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B(0, n)$, de bolas abertas com centro na origem e raio $n \geq 1$. Então, como K é compacto, existe uma subcobertura finita

$$K \subseteq B(0, n_1) \cup \cdots \cup B(0, n_r).$$

Daí, tomando $m = \max\{n_1, \ldots, n_r\}$, temos que $K \subseteq B(0, m)$, donde segue que K é limitado.

($\Leftarrow$) Suponhamos $K \subseteq \mathbb{R}^n$ fechado e limitado. Como K é limitado, existe $c > 0$ tal que

$$K \subseteq [-c, c] \times \cdots \times [-c, c] \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Logo, pelo Teorema de Heine-Borel (Teorema 4.1.10) e pelo Corolário 4.1.26, $[-c, c] \times \cdots \times [-c, c]$ é compacto, assim K é fechado em um compacto. Portanto, pela Proposição 4.1.6, K é compacto. □

Observação 4.1.28. *Em um espaço métrico* (M,d) *não vale, em geral, que* $K \subseteq M$ *é compacto se, e somente se,* K *é fechado e limitado. Por exemplo, considerando* $(\mathbb{R}, d_{01})$, $K = \mathbb{R}$ *é fechado e limitado,* *mas não é compacto, pois* $\mathbb{R} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}}\{x\}$ *é uma cobertura aberta de* $\mathbb{R}$ *que não admite subcobertura finita. Mas a implicação "compacto em espaço métrico é fechado e limitado", é sempre válida conforme veremos adiante, no Corolário 4.4.5.*

4.1.1 Exercícios

1) Prove que um subconjunto compacto de um espaço métrico é fechado (Corolário 4.1.9).

2) Mostre que, se σ_1, σ_2 são topologias em S tais que $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$ e (S, σ_2) é compacto, então (S, σ_1) é compacto.

3) Mostre que a reunião finita de subconjuntos compactos de um espaço topológico S é um compacto.

4) Seja S um espaço de Hausdorff.

   a) Se $p \in S$ e K é um subconjunto compacto de S, com $p \notin K$ mostre que existem abertos disjuntos U e V em S tais que $p \in U$ e $K \subseteq V$.

   b) Se W e K são subconjuntos compactos de S e disjuntos mostre que existem abertos disjuntos U e V em S tais que $W \subseteq U$ e $K \subseteq V$.

   (*Sugestão*: no item a, para cada $q \in K$, considere abertos disjuntos U_p^q e V_p^q, com $p \in U_p^q$ e $q \in V_p^q$ e use que K é compacto. Para provar o item b use o fato anterior.)

5) Seja $f : S \to T$ uma aplicação entre espaços topológicos. Se T é compacto e o gráfico $G_f = \{(x, f(x)) \in S \times T : x \in S\}$ é fechado em $S \times T$ (com a topologia produto) mostre que f é contínua. (*Sugestão*: supondo $G_f \subseteq S \times T$ fechado conclua, usando o Lema 4.1.25, que a restrição $p_1|_{G_f} : G_f \to S$ é uma aplicação fechada, e portanto um homeomorfismo (uma vez que é também contínua e bijetora) e assim sua inversa é continua, donde segue, compondo tal aplicação com a restrição de p_2 a G_f, que f é contínua.)

6) Seja $f : S \to T$ uma aplicação entre espaços topológicos. Se T é compacto e de Hausdorff, mostre que f é contínua se, e somente se G_f é fechado. (*Sugestão*: vide Exercício 3.1.2 - 4 e o exercício anterior, ou Lima [14], Cap. 7, §2, Corolário, p. 183.)

7) Um espaço topológico compacto é separável? (*Sugestão*: tome $(\mathbb{R}, \sigma_p)$, em que $\sigma_p = \{\mathbb{R}\} \cup \{G : G \subseteq \mathbb{R} - \{p\}\}$, sendo p um número real qualquer fixado. $(\mathbb{R}, \sigma_p)$ é compacto (e e_1-espaço), mas qualquer $D \subseteq \mathbb{R}$, com $\overline{D} = \mathbb{R}$, $D \supseteq \mathbb{R} - \{p\}$.)

8) Prove que todo espaço métrico (M, d) compacto é separável. (*Sugestão*: para cada $n \in \mathbb{N}^*$, existe uma subcobertura finita $\mathcal{F}_n = \{B(x_n^i, 1/n),\ x_n^i \in M,\ i = 1, \ldots, k_n\}$ que cobre M. Tome $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{x_n^i \in M,\ i = 1, \ldots, k_n\}$.)

9) Demonstre que toda aplicação bijetora e contínua de um espaço topológico compacto sobre um espaço de Hausdorff é um homeomorfismo. (*Sugestão*: mostre que f é fechada.)

10) Sejam S um espaço topológico compacto e $\mathcal{F}$ a família das funções reais contínuas (com domínio S) tais que: (a) se $f,\ g \in \mathcal{F}$ então o produto $f \cdot g \in \mathcal{F}$, e, (b) para cada $y \in S$ existe uma vizinhança $V(y)$ e uma função $f \in \mathcal{F}$ que se anula identicamente sobre V. Prove que $\mathcal{F}$ contém a função nula. (Dugundji [5], Cap. 11, Exerc. 3 da Seção 1, p. 251.)

11) Seja S um espaço topológico. Prove ou dê um contraexemplo:

a) Reunião de compactos em S é compacto. (*Sugestão*: o caso finito está estabelecido no Exercício 3 acima, e para o caso infinito observe, por exemplo, que $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}[-n,n]$.)

b) Interseção de compactos é compacto. (*Sugestão*: considere $\mathbb{R}$ com a topologia $\tau = \{\emptyset,\mathbb{R}\} \cup \{]a,+\infty[,\ a \in \mathbb{R}\}$ e os compactos $K_1 = [0,2[\, \cup\,]4,5[$ e $K_2 = [3,6[$.)

c) Interior de compacto é compacto.

d) Fecho de compacto é compacto. (*Sugestão*: observe que $\overline{\{p\}} = \,]-\infty,p]$, para $p \in \mathbb{R}$, tomando $\mathbb{R}$ com a topologia como no item b.)

e) Fronteira Fr(K) de um compacto $K \subseteq S$ é compacto. E se S for de Hausdorff? (*Sugestão*: verifique se vale Fr(K) $\subseteq K$.)

12) Mostre, usando a Propriedade de Interseção Finita, que $S = [4,7[$ com a topologia induzida de $\mathbb{R}$ não é compacto.

13) Dizemos que um espaço de Hausdorff S é um ***k-espaço*** se: dado $F \subseteq S$, F é fechado de S se, e somente se, para todo compacto $K \subseteq S$, $K \cap F$ é fechado. Mostre que:

a) Todo espaço compacto Hausdorff S é um k-espaço.

b) Todo espaço Hausdorff S que satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade é um k - espaço. (*Sugestão*: Suponhamos que S seja um e_1 espaço Hausdorff e que $K \cap F$ é fechado, para todo compacto K de S. Se F não é fechado existe $x \in \overline{F} - F$. Com S é e_1, existe (x_n), $x_n \in F$, convergindo para x. Tome $K = \{x\} \cup \{x_n : n \in N^*\}$, então K é um compacto, mas $K \cap F$ não é fechado em S.)

Observação: Na definição de k- espaço dada em Lima [14] (Cap. 7, §6, Exerc. 39, p. 214) não é exigido que S seja Hausdorff, e $K \cap F$ deve ser fechado em K, ao invés de ser fechado em S. Note que supondo S Hausdorff, a implicação "F fechado implica $K \cap F$ fechado (em S)", sendo K compacto, é sempre válida. Na referência citada tal espaço é também denominado de espaço "*compactamente gerado*". Espaço compactamente gerado será abordado no Exercício 4.6-9.

14) Sejam S um k-espaço e T um espaço topológico. Mostre que uma aplicação $f : S \to T$ é contínua se, e somente se, sua restrição a todo compacto $K \subseteq S$ é contínua. (*Sugestão*: $(f\,|_K)^{-1}\,(Y) = f^{-1}(Y) \cap K$, para todo Y fechado em T.)

15) Dê uma demonstração da Proposição 4.1.24 (*de que o produto $S \times T$ de dois espaços topológicos compactos é compacto com a topologia produto*) usando a definição inicial de espaço compacto. (*Sugestão*: suponha $S \times T = \bigcup_{i \in L}(G_i \times H_i)$, uma cobertura aberta de $S \times T$ por abertos básicos. Para cada $x \in S$, como $\{x\} \times T$ é homeomorfo à T, $\{x\} \times T \subseteq \bigcup_{i \in L}(G_i \times H_i)$ e T é compacto, existe $L_x \subseteq L$, L_x finito tal que $\{x\} \times T \subseteq \bigcup_{i \in L_x}(G_i \times H_i)$. Podemos supor que $x \in G_i$, para todo $i \in L_x$, uma vez que os $G_i \times H_i$ com $x \notin G_i$ podem ser desprezados. Tome $G_x = \bigcap_{i \in L_x} G_i$ e observe que $G_x \times T \subseteq \bigcup_{i \in L_x}(G_i \times H_i)$ (pois, dado $(a,b) \in G_x \times T$, como $(x,b) \in \{x\} \times T$, existe $i_0 \in L_x$ de modo que $(x,b) \in G_{i_0} \times H_{i_0}$. Daí, $(a,b) \in G_{i_0} \times H_{i_0}$). Agora $S \subseteq \bigcup_{x \in S} G_x$ e S é compacto, logo $S = G_{x_1} \cup G_{x_2} \cup \cdots \cup G_{x_n}$. Seja $J = L_{x_1} \cup \cdots \cup L_{x_n} \subseteq L$. Então J é finito e $S \times T \subseteq \bigcup_{j \in J}(G_j \times H_j)$ (visto que $(u,t) \in S \times T \Rightarrow u \in G_{x_k}$, para algum k. Daí $(u,t) \in G_{x_k} \times T$, e entao existe algum $j_0 \in L_{x_k}$ tal que $(u,t) \in G_{j_0} \times H_{j_0}$), o que mostra que $S \times T$ é compacto.)

16) (*Lema do Tubo Generalizado*) Considere espaços topológicos X e Y e subespaços compactos $S \subseteq X$ e $T \subseteq Y$. Seja W um aberto no produto $X \times Y$, com $S \times T \subseteq W$. Prove que existem abertos U e V em X e Y, respectivamente, tais que $S \times T \subseteq U \times V \subseteq W$. No caso em que $T = Y$, verifique que a compacidade de S pode ser omitida da hipótese. (*Sugestão*: para cada $(x,y) \in S \times T \subseteq W$, existe um aberto básico $A_{xy} \times B_{xy}$ em $X \times Y$ tal que $(x,y) \in A_{xy} \times B_{xy} \subseteq W$. Para cada $x \in S$ fixado, $\{B_{xy}, y \in T\}$ cobre T (compacto), assim existem $B_{xy_1}, \ldots, B_x y_{n_x}$ abertos em Y tais que $T \subseteq V_x = B_{xy_1} \cup \ldots \cup B_x y_{n_x}$. Considere $U_x = A_{xy_1} \cap \ldots \cap A_x y_{n_x}$ e verifique que $\{x\} \times T \subseteq U_x \times V_x \subseteq W$. Agora, $\{U_x, x \in S\}$ cobre S (compacto), logo $S \subseteq U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_m}$. Tome $U = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_m}$ e $V = V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_m}$.)

4.2 Produtos Infinitos e Teorema de Tychonoff

Nesta seção definimos a topologia produto para o produto de uma quantidade qualquer de espaços topológicos, estudamos algumas de suas propriedades e demostramos o Teorema de Tychonoff. Observamos que poderíamos definir uma topologia no produto de uma família qualquer de espaços topológicos de dois modos que seriam naturais a partir da definição da topologia dada no caso dos produtos cartesianos finitos. No primeiro modo, a topologia é a que tem como *base* o conjunto dos produtos cartesianos dos conjuntos abertos de cada fator e, no segundo, a topologia é a que tem como *sub-base* (topologia gerada) o conjunto dos produtos de abertos dos fatores, sendo que o número de abertos distintos do espaço todo, em cada caso, é finito. As duas topologias generalizam o caso de produto finito (uma vez que em produtos finitos as duas formas de definir levam à mesma topologia). Com a segunda topologia o produto de uma família qualquer de espaços compactos é compacto (Teorema de Tychonoff), porém com a primeira esse resultado não vale. Essa é uma das principais razões pela qual a segunda topologia é a escolhida como a *topologia produto*, tal topologia é também denominada *topologia de Tychonoff*.

Seja $\{(S_\lambda,\sigma_\lambda)\}_{\lambda\in L}$ uma família não vazia de espaços topológicos e considere o produto $S = \prod_{\lambda\in L} S_\lambda$, definido no Cap.1, Definição 1.9.1. Como mencionado, queremos dar a S uma topologia que estende a topologia produto dada no caso em que L é finito. Apresentamos as duas topologias (que são naturais).

Definição 4.2.1. *Dado* $S = \prod_{\lambda\in L} S_\lambda$, *seja* $\mathfrak{B} = \{\prod_{\lambda\in L} G_\lambda : \ G_\lambda \in \sigma_\lambda, \text{para todo } \lambda \in L\}$. *Então* $\mathfrak{B}$ *é base para uma topologia em S (verifique). Tal topologia é chamada* ***topologia box*** *e iremos denotar por* σ_{box}. *Claramente esta topologia estende a topologia produto no caso em que L é um conjunto finito.*

A segunda topologia que vamos definir para o produto $S = \prod_{\lambda\in L} S_\lambda$ é menos fina que a topologia box e preserva propriedades interessantes no produto, como a compacidade.

Considere, para cada $\alpha \in L$, a "projeção sobre o α-ésimo fator"

$$p_\alpha : S = \prod_{\lambda\in L} S_\lambda \ \rightarrow \ S_\alpha; \ \ x = (x_\lambda)_{\lambda\in L} \mapsto p_\alpha(x) := x_\alpha.$$

Para cada G_α aberto de S_α,

$$p_\alpha{}^{-1}(G_\alpha) = \{x = (x_\lambda)_{\lambda\in L} \in S : \ p_\alpha(x) \in G_\alpha\} = \{x = (x_\lambda)_{\lambda\in L} \in S : \ x_\alpha \in G_\alpha\} = G_\alpha \times \prod_{\lambda\in L-\{\alpha\}} S_\lambda.$$

Definição 4.2.2. *Seja* $\{(S_\lambda,\sigma_\lambda)\}_{\lambda\in L}$ *uma família não vazia de espaços topológicos. A* ***topologia produto*** *ou* ***topologia de Tychonoff*** *sobre o produto cartesiano* $\prod_{\lambda\in L} S_\lambda$ *é a topologia que tem para sub-base a família*

$$\mathfrak{S} = \{p_\alpha^{-1}(G_\alpha) : \ \alpha \in L, \ G_\alpha \in \sigma_\alpha\},$$

onde $p_\alpha : \prod_{\lambda\in L} S_\lambda \to S_\alpha$, $p_\alpha(x) = x_\alpha$, *é a projeção na* α*-ésima coordenada. Denotaremos esta topologia por* $\prod \sigma_\alpha$, *ou* σ_{prod}. *Com esta topologia* $\prod_{\lambda\in L} S_\lambda$ *é chamado* ***espaço produto****. Tal topologia também estende a topologia produto no caso em que L é um conjunto finito (Exemplo 2.4.12- 2).*

Proposição 4.2.3. *Seja* $\{(S_\lambda,\sigma_\lambda)\}_{\lambda\in L}$ *uma família não vazia de espaços topológicos e considere em* $S = \prod_{\lambda\in L} S_\lambda$ *a topologia produto. Então:*

(i) *As projeções* $p_\alpha : S = \prod_{\lambda\in L} S_\lambda \ \rightarrow S_\alpha$ *são contínuas, para cada* $\alpha \in L$, *e a topologia produto é a topologia induzida sobre* $\prod_{\lambda\in L} S_\lambda$ *por essas projeções. Assim, ela é a topologia menos fina ("menor") que torna as projeções contínuas.*

(ii) *Um aberto básico na topologia produto é da forma*

$$G_{\alpha_1} \times \cdots \times G_{\alpha_r} \times \prod_{\lambda\in L, \ \lambda\neq\alpha_i} S_\lambda,$$

onde G_{α_i} *é aberto em* S_{α_i}.

(iii) *As projeções* $p_\alpha : \prod_{\lambda\in L} S_\lambda \to S_\alpha$ *são aplicações abertas.*

(iv) *Dados* (X,σ) *um espaço topológico e* $f : X \to \prod_{\lambda\in L} S_\lambda$ *uma aplicação. Então* f *é contínua se, e somente se,* $p_\alpha \circ f : X \to S_\alpha$ *é contínua, para todo* $\alpha \in L$.

Demonstração. Demonstraremos o item (iv). As demonstrações dos itens (i), (ii) e (iii) são deixadas como exercícios. ($\Rightarrow$) Se f é contínua, então $p_\alpha \circ f$ é contínua, pois é composta de funções contínuas. ($\Leftarrow$) Suponhamos que $p_\alpha \circ f : X \to S_\alpha$ é contínua para todo $\alpha \in L$. Seja U um aberto básico de $\prod_{\lambda\in L} S_\lambda$. Temos

$$U = G_{\alpha_1} \times \cdots \times G_{\alpha_n} \times \prod_{\lambda\in L,\ \lambda\neq\alpha_i} S_\lambda \;=\; \bigcap_{i=1}^{n} p_{\alpha_i}^{-1}(G_{\alpha_i}).$$

Assim,

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} p_{\alpha_i}^{-1}(G_{\alpha_i})\right) = \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(p_{\alpha_i}^{-1}(G_{\alpha_i})) = \bigcap_{i=1}^{n} (p_{\alpha_i}\circ f)^{-1}(G_{\alpha_i}),$$

de modo que $f^{-1}(U)$ é aberto, logo f é contínua. □

Observação 4.2.4. *O item* (iv) *da proposição anterior não vale se consideramos no produto* $S = \prod_{\lambda\in L} S_\lambda$ *a topologia box. Tome, por exemplo* (*vide Exemplo 1.9.4*), $\mathbb{R}$ *com a topologia usual,* $S = \mathbb{R}^\omega = \mathfrak{F}(\mathbb{N}^*,\mathbb{R}) = \prod_{n\in\mathbb{N}^*}(\mathbb{R})_n$ *com a topologia box,* $X = \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$; $a \mapsto f(a) = (a,a,\ldots)$. *Então,* $p_n \circ f = id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é contínua para todo* $n \in \mathbb{N}^*$, *mas* f *não é contínua em* $a = 0$, *pois para o aberto da topologia box,* $V =]-1,1[\times]-1/2,1/2[\times \cdots \times]-1/n,1/n[\times \cdots$, V *contém* $f(0)$ *e não existe aberto* G *em* $X = \mathbb{R}$ *contendo* 0 *tal que* $f(G) \subseteq V$, *uma vez que, para cada G, existe* $\varepsilon > 0$, *tal que* $0 \in]-\varepsilon,\varepsilon[\subseteq G$, *mas* $f(]-\varepsilon,\varepsilon[)$ *não está contido em* V. *Obviamente, a implicação "se f é contínua então* $p_\alpha \circ f : X \to S_\alpha$ *é contínua, para todo* $\alpha \in L$*" é verdadeira.*

Teorema 4.2.5 (Teorema de Tychonoff)**.** *Se* $(S_\lambda,\sigma_\lambda)$ *é compacto, para todo* $\lambda \in L$, *então* $(S,\sigma) = (\prod_{\lambda\in L} S_\lambda,\ \prod \sigma_\lambda)$ *é compacto.*

Demonstração. Nessa prova vamos usar o Teorema de Alexander, e é análoga à apresentada para dois espaços topológicos. Ou seja, vamos mostrar que toda cobertura de S por abertos sub-básicos admite uma subcobertura finita, ou equivalentemente, se uma família de abertos sub-básicos é tal que nenhuma subfamília finita cobre S, então tal família não cobre S (Observação 4.1.3 - *i*).

Seja $\mathfrak{S} = \{p_\alpha^{-1}(G_\alpha) : \alpha \in L,\ G_\alpha \in \sigma_\alpha\}$ a sub-base que define a topologia produto e suponhamos que $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{S}$ é tal que nenhuma subfamília finita de $\mathcal{F}$ cobre S. Para cada $\alpha \in L$, seja

$$\mathcal{F}_\alpha = \{G_\alpha \in \sigma_\alpha :\ {p_\alpha}^{-1}(G_\alpha) \in \mathcal{F}\}.$$

Então nenhuma subfamília finita de $\mathcal{F}_\alpha$ cobre S_α, pois caso contrário, $S_\alpha = G^1{}_\alpha \cup \ldots \cup G^r{}_\alpha$ com $G^j{}_\alpha \in \mathcal{F}_\alpha$ e daí $S = p_\alpha^{-1}(S_\alpha) = p_\alpha^{-1}(G^1{}_\alpha \cup \ldots \cup G^r{}_\alpha) = p_\alpha^{-1}(G^1{}_\alpha) \cup \ldots \cup p_\alpha^{-1}(G^r{}_\alpha)$, e assim uma subfamília finita de $\mathcal{F}$ cobriria S, contradizendo a suposição inicial. Como cada S_α é compacto, segue que $\mathcal{F}_\alpha$ não é cobertura de S_α, para cada $\alpha \in L$. Portanto existe $x_\alpha \in S_\alpha - \bigcup_{G_\alpha\in\mathcal{F}_\alpha} G_\alpha$, para cada $\alpha \in L$. Isso dá origem a um elemento

$$x = (x_\lambda)_{\lambda \in L} \text{ em } S = \prod_{\lambda \in L} S_\lambda.$$

Tal elemento não pertence a $\bigcup_{V \in \mathcal{F}} V$, pois caso contrário, existiria $V \in \mathcal{F}$ tal que $x \in V$. Como $V \in \mathcal{F} \subseteq \mathfrak{S}$, então $V = {p_\alpha}^{-1}(G_\alpha)$ para algum α, daí teríamos $p_\alpha(x) = x_\alpha \in G_\alpha$, com $G_\alpha \in \mathcal{F}_\alpha$ (pois ${p_\alpha}^{-1}(G_\alpha) = V \in \mathcal{F}$). O que é uma contradição visto que (pela escolha) x_α não pertence a G_α, para todo $G_\alpha \in \mathcal{F}_\alpha$. Assim $\mathcal{F}$ não é cobertura aberta de S e, portanto, S é compacto. □

Claramente a recíproca do teorema anterior é verdadeira, uma vez que as projeções são contínuas e a imagem de compacto por uma aplicação contínua é um espaço compacto. Assim, tem-se:

Corolário 4.2.6. *Dada uma família de espaços topológicos $(S_\lambda, \sigma_\lambda)$, $\lambda \in L$. O produto $S = \prod_{\lambda \in L} S_\lambda$, com a topologia produto, é compacto se, e somente se, cada fator $(S_\lambda, \sigma_\lambda)$ é compacto.*

Observação 4.2.7. *i) O Teorema 4.2.5 não vale se consideramos no produto $S = \prod_{\lambda \in L} S_\lambda$ a topologia box, que é a topologia gerada pela base formada pelos produtos cartesianos dos abertos de cada fator. Tome, por exemplo, a família de espaços compactos $S_n = (\{0,1\},\ \sigma_{disc})$. A topologia box em $S = \prod_{n \in \mathbb{N}^*}(\{0,1\})_n = \mathfrak{F}(\mathbb{N}^*, \{0,1\})$ (vide Exemplo 1.9.3), também denotado por $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$, é a topologia discreta e assim S não é compacto (pois o espaço produto é infinito).*

ii) O Teorema de Tychonoff pode ser provando usando PIF ver, por exemplo, Lima [14] (Cap. 9, Prop. 11, p. 255-257). No entanto para tal prova também é necessário o Lema de Zorn (que foi usado no Teorema de Alexander).

4.2.1 Exercícios

1) Considere em $[0,1]$ a topologia usual induzida de $\mathbb{R}$. Justifique porque o conjunto das funções $\mathfrak{F}(\mathbb{R},\ [0,1])$, visto como um espaço topológico com a topologia produto, é compacto. (*Sugestão*: lembrar que $\mathfrak{F}(\mathbb{R}, [0,1]) = \prod_{\lambda \in \mathbb{R}}([0,1])_\lambda$ e usar o Teorema de Tychonoff.)

2 Mostre que o produto $S = \prod_{\lambda \in L} S_\lambda$ de espaços topológicos (com a topologia produto) é de Hausdorff se, e somente se, cada fator S_λ é de Hausdorff (Lima [14], Cap. 4, Prop. 9, p. 253). Mostre que isso vale também para a topologia Box.

3) Mostre que uma sequência $(w_n)_n$ no espaço produto $S = \prod_{\lambda \in L} S_\lambda$ converge para $w \in S$ se, e somente se, para cada $\lambda \in L$, a sequência $(p_\lambda(w_n))_n$ converge para $p_\lambda(w)$, para cada $\lambda \in L$. (Munkres [20], Cap. 2, §19, Exerc. 6, p. 118 ou Lima [14], Cap. 9, Prop. 3, p. 245.)

4.3 Espaços Sequencialmente e Enumeravelmente Compactos

Passaremos a destacar outros "tipos de compacidade" para espaços topológicos e estabeleceremos as relações que existem com a compacidade definida na Seção 4.1. Mais precisamente, trataremos aqui dos espaços "Sequencialmente e Enumeravelmente (ou Contavelmente) Compactos".

Definição 4.3.1. *Dizemos que um espaço topológico (S,σ) é **sequencialmente compacto** se toda sequência em (S,σ) admite uma subsequência convergente.*

Exemplo 4.3.2. *Todo espaço topológico finito (S,σ) é sequencialmente compacto, pois para toda sequência (x_n) de S, o conjunto $\{x_n,\ n \geq 1\}$ é finito, de modo que a sequência (x_n) possui uma subsequência constante, que obviamente é convergente.*

Observação 4.3.3. *Compacidade não implica compacidade sequencial. De fato, sejam $I = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$, σ a topologia usual sobre I e $S = \mathfrak{F}(\mathbb{R},[0,1]) = \prod_{\lambda \in \mathbb{R}} I_\lambda$, onde $I_\lambda = I$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, com a topologia produto ξ. Pelo Teorema de Tychonoff, (S,ξ) é compacto. Vejamos que S não é sequencialmente compacto. Considere T o conjunto de todas as subsequências da sequência $(1,2,3,4,\ldots)$. Então T tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{R}$ (que é igual a cardinalidade de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$), de modo que existe uma aplicação bijetora $f : \mathbb{R} \to T$. Seja $r \in \mathbb{R}$ e denotemos $f(r) = (n_1^r, n_2^r, \ldots)$. Definamos agora uma sequência $(x_n)_n$, de funções em S, da seguinte forma:*

- *$x_n(r) = 0$, se $n = n_i^r$ e i é ímpar (i. é, $x_n(r) = 0$, sempre que n aparece na sequência $f(r)$ e em uma posição ímpar), e*
- *$x_n(r) = 1$, caso contrário.*

Então $x_n : \mathbb{R} \to I$ é uma função e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ é uma sequência em (S,ξ) que não tem subsequência convergente. De fato, se $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}^*}$ fosse uma subsequência convergente, tomando $r = f^{-1}(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ teríamos (fixando esse r), que a subsequência $(x_{n_i}(r))_{i \in \mathbb{N}^*} = p_r((x_{n_i})_i)$ converge em $I_r = I$, mas $(x_{n_i}(r))_{i \in \mathbb{N}^*} = (0,1,0,1,0,1,\ldots)$ que não converge em I, obtendo assim uma contradição. Então (x_n) não tem subsequência convergente.

Portanto (S,ξ) é compacto, mas não é sequencialmente compacto. (Um exemplo similar é dado em Lima [14], Cap. 7, §4, Exemplo 26, p. 193-194.)

Também, compacidade sequencial não implica em compacto (vide Bourbaki [1], Cap. 1, §10, Exerc. 22 e Cap. 9, §2, Exerc. 15, apud Lima [14], p. 193). □

Proposição 4.3.4. *Se (S,σ) é sequencialmente compacto e $F \subseteq S$ é fechado, então (F,σ_F) é sequencialmente compacto.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência em $F \subset S$. Como S é sequencialmente compacto, existe uma subsequência (x_{n_k}) convergindo para um ponto $x \in S$. Como (x_{n_k}) é uma sequência em F, $x \in \overline{F} = F$, de modo que (x_{n_k}) converge em F. □

Proposição 4.3.5. *Se (S,σ) é sequencialmente compacto e $f : (S,\sigma) \to (T,\tau)$ é contínua e sobrejetora, então (T,τ) é sequêncialmente compacto.*

Demonstração. Exercício. □

Corolário 4.3.6. *Compacidade sequencial é propriedade topológica.*

Definição 4.3.7. *Um espaço topológico (S,σ) é **enumeravelmente compacto** se toda cobertura enumerável de S admite uma subcobertura finita.*

Exemplo 4.3.8. 1) *Todo espaço compacto é enumeravelmente compacto (em particular todo espaço finito é enumeravelmente compacto). A recíproca não é verdadeira. Um exemplo de espaço enumeravelmente compacto que não é compacto pode ser visto em Steen e SeeBach [27] (Contraexemplo 42 - Open Ordinal Space* $[0,\Omega[$*, p. 68). De fato esse espaço é também sequencialmente compacto (e não compacto). Na próxima proposição é apresentada uma recíproca parcial.*

2) $(\mathbb{R},\sigma_{usual})$ *não é enumeravelmente compacto, pois, por exemplo, a cobertura enumerável* $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]-n,n[$ *não admite subcobertura finita.*

3) $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ *é enumeravelmente compacto, pois é compacto, mas* $]a,b[\subseteq \mathbb{R}$ *não é enumeravelmente compacto. Assim, a propriedade de ser enumeravelmente compacto não é hereditária.*

4) *Se* (S,σ) *é enumeravelmente compacto e* η *é uma topologia em* S *tal que* $\eta \subseteq \sigma$ *então* (S,η) *é enumeravelmente compacto.*

Proposição 4.3.9. *Se* (S,σ) *é um espaço* e_2*, então* (S,σ) *é enumeravelmente compacto se, e somente se,* (S,σ) *é compacto.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Se (S,σ) é e_2, então (S,σ) é um espaço de Lindelöf (Proposição 2.6.10), assim toda cobertura aberta de S admite uma subcobertura enumerável. Agora, como (S,σ) é enumeravelmente compacto, toda cobertura enumerável admite uma subcobertura finita. Portanto (S,σ) é compacto.
$(\Leftarrow)$ Vale, obviamente, para espaço quaisquer (como já observado no Exemplo 4.3.8 - 1). □

Proposição 4.3.10. *Se* $f : (S,\sigma) \to (T,\tau)$ *é contínua e sobrejetora, e* (S,σ) *é enumeravelmente compacto, então* (T,τ) *é enumeravelmente compacto.*

Demonstração. A demonstração é deixada como exercício. □

Corolário 4.3.11. *Compacidade enumerável é propriedade topológica.*

Proposição 4.3.12. *Sejam* (S,σ) *um espaço enumeravelmente compacto e* $A \subseteq S$ *fechado. Então* (A,σ_A) *é enumeravelmente compacto.*

Demonstração. Exercício. □

Proposição 4.3.13. *Seja* (S,σ) *um espaço topológico.*

(i) *Se* S *é enumeravelmente compacto então* S *tem a propriedade de Bolzano-Weierstrass (Definição 4.1.15).*

(ii) *Se* S *tem a propriedade de Bolzano-Weierstrass e todo subconjunto unitário de* S *é fechado (o que significa, como veremos posteriormente na Definição 6.2.3,* S *ser "*T_1 *espaço"), em particular se* S *é Hausdorff, então* S *é enumeravelmente compacto.*

Demonstração. (i) Suponhamos que exista $A \subseteq S$, com A infinito e $A' = \emptyset$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que A é enumerável, $A = \{a_1, a_2, ...\}$ (com a_i distintos). Notemos que todo $B \subseteq A$ é fechado (pois $p \in \overline{B} - B \Rightarrow p \in B' \subseteq A' = \emptyset$, já que $\overline{B} = B \cup B'$). Defina $G_n = S - \{a_n, a_{n+1}, ...\}$, $n = 1, 2, ...$ Temos então que os G_n são subconjuntos abertos de S e $G_1 = S - A \subseteq G_2 \subseteq ....$ Se $x \in A$, digamos $x = a_m$, então $x \in G_{m+1}$, e se $x \in S - A$ então pertence a G_1 (de fato a todo G_n). Assim $\{G_n\}_n$ é uma cobertura aberta enumerável de S que não possui subcobertura finita, visto que $G_{n_1} \cup ... \cup G_{n_r} = G_{max\{n_1,...,n_r\}} \neq S$.

(ii) Vamos supor que S não seja enumerávelmente compacto. Assim existe uma cobertura aberta $\{U_n\}_n$ de S que não admite subcobertura finita. Para cada n, existe $x_n \in S - (U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_n)$. Note que podemos tomar $x_n \notin \{x_1, ..., x_{n-1}\}$. Considere (o conjunto infinito) $A = \{x_1, x_2, ...\}$. Mostremos que $A' = \emptyset$, o que é uma contradição. Seja $p \in S$, então $p \in U_m$ para algum m. Pela escolha dos $x_n's$, U_m pode conter somente x_i, para $i < m$. Assim $U_m \cap A$ (e também $U_m \cap (A - \{p\})$ é um conjunto finito e portanto $p \notin A'$, pois, da hipótese, de que todo subconjunto unitário de S é fechado, segue (vide Observação 2.2.13 - i) que deveríamos ter que $U_m \cap A$ infinito (se $p \in A'$). □

Corolário 4.3.14. *Um espaço de Hausdorff (em particular um espaço métrico) é enumeravelmente compacto se, e somente se, tem a propriedade de Bolzano-Weierstrass.*

Demonstração. Segue da proposição anterior, uma vez num espaço Hausdorff todo conjunto unitário é fechado. □

Proposição 4.3.15. *Se (S, σ) é enumeravelmente compacto, e_1 espaço e todo subconjunto unitário de S é fechado ("T_1 espaço") então (S, σ) é sequêncialmente compacto.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n \in N^*}$ uma sequência em S. Se o conjunto dos pontos $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ é finito, então (x_n) tem uma subsequência constante, logo convergente. Suponhamos A infinito. Pela proposição anterior, item (i), A tem um ponto de acumulação $x \in S$. Como (S, σ) é e_1, existe uma base local enumerável encaixada em x, suponhamos $\mathcal{B}_x = \{U_1, U_2, \ldots\}$. Como todo subconjunto unitário é fechado de S, $x \in A'$ implica que $A \cap U_i$ é infinito, para todo $i \in N^*$ (Observação 2.2.13 -i). Então, para cada i, seja $x_{n_i} \in A \cap U_i$ com $x_{n_i} \notin \{x_{n_1}, \ldots, x_{n_{i-1}}\}$ e $n_i > n_{i-1}$. Assim, obtemos um subsequência $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}^*}$ de (x_n) converge para x (verifique!), o que conclui a prova. □

A proposição seguinte nos dá uma equivalência para espaços enumeravelmente compactos em termos de sequências, para tanto vamos introduzir um novo conceito.

Definição 4.3.16. *Sejam (S, σ) um espaço topológico e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ uma sequência de pontos de S. Dizemos que $p \in S$ é um* ***ponto limite*** *(cluster point)* ***da sequência*** *$(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ se, dado $G \in \sigma$, com $p \in G$, para todo $N \in \mathbb{N}$, tem-se $G \cap \{x_n : n \geq N\} \neq \emptyset$. (Sims [23], Cap. 3, Definição 3-8, p. 68.)*

Observação 4.3.17. *Dada uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ em um espaço topológico, temos vários conceitos distintos associados: limite da sequência, ponto limite da sequência, ponto de acumulação do conjunto $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ e ω - ponto de acumulação do conjunto A.*

i) Sabemos que em espaços topológicos em que todo subconjunto unitário é fechado (o que inclui espaços de Hausdorff) os dois últimos conceitos são equivalentes (Observação 2.2.13 - i).

ii) Se x é um limite da sequência (x_n) (i. é, $x_n \to x$), ou de uma subsequência de (x_n), então x é um ponto limite da sequência.

iii) Todo ω - ponto de acumulação de A é um ponto limite de (x_n). Logo, em espaço em que todo subconjunto unitário é fechado, se $x \in A'$ então x é um ponto limite da sequência (x_n).

iv) Em geral, x ser ponto limite de (x_n) não implica que $x \in A'$ e nem que x é limite de (x_n). Por exemplo, tome em $(\mathbb{R}, \tau_{usual})$, $(x_n) = (0,4,0,8,0,...)$, em que $x_n = 0$, se n é impar, e $x_n = 2n$, se n é par. Tem-se que 0 é um ponto limite de (x_n), mas $0 \notin A'$ e (x_n) não converge para 0. Ou, considere $S = \mathbb{N}^*$, $\tau = \{\emptyset, \mathbb{N}^*, \{1\}, \mathbb{N}^* - \{1\}\}$ e $(x_n) = (1,2,\ 1,2,3,\ 1,2,3,4,\ 1,...)$. Todo elemento de $\mathbb{N}^*$ é ponto limite da sequência, nenhum ponto de $\mathbb{N}^*$ é limite da sequência (a sequência não converge), ainda $A' = \mathbb{N}^* - \{1\}$, de modo que 1 é ponto limite, não é limite de (x_n), e $1 \notin A'$.

v) Podemos ter um elemento x em A' e x não ser limite da sequência (x_n) e nem ponto limite. Tome, por exemplo, $S = \{1,2,3\}$ com $\tau = \{\emptyset, S, \{1\}, \{2,3\}\}$ e $(x_n) = (2,3,1,1,...)$. Então $A' = \{2,3\}$, porém (x_n) não converge para 2 e nem para 3 e, ainda, 2 e 3 não são pontos limites da sequência. Observe também que $x_n \to 1$ (de modo que 1 é limite e ponto limite), mas $1 \notin A'$.

Proposição 4.3.18. *Um espaço topológico (S, σ) é enumeravelmente compacto se, e somente se, toda sequência em (S, σ) tem um ponto limite.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponhamos, por absurdo, que alguma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ em S não tem ponto limite. Então, para todo $x \in S$, existe $G_x \in \sigma$ e $N \in \mathbb{N}^*$ tal que $x \in G_x$ e $G_x \cap \{x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots\} = \emptyset$ (ou seja, $x_k \notin G_x$, se $k > N$). Note que podemos ter o mesmo N para elementos $x \neq y$ em S. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, seja $\mathcal{F}_n = \{G_x \in \sigma : G_x \cap \{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\} = \emptyset\}$ e considere

$$U_n = \bigcup_{G_x \in \mathcal{F}_n} G_x$$

Então $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ é uma cobertura aberta e enumerável de (S, σ) que não admite subcobertura finita (uma vez que para todo $V = U_{n_1} \cup ... \cup U_{n_r}$, tomando $m > max\{n_1, ...n_r\}$, $x_m \notin V$), donde (S, σ) não é enumeravelmente compacto, uma contradição!

$(\Leftarrow)$ Suponhamos agora que S não é enumeravelmente compacto. Assim, existe uma cobertura aberta enumerável $\{G_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ de S que não possui subcobertura finita. (Note que podemos supor o conjunto de índices da cobertura igual a $\mathbb{N}^*$, pois se for finito, a cobertura já seria finita). Considere $V_1 = G_1$ e denote por V_2 o primeiro G_i da cobertura que não está contido em $V_1 = G_1$, por V_3 o primeiro G_i que não está contido em $V_1 \cup V_2$, e assim por diante, de modo que V_n denotará o primeiro G_i que não está contido em $\bigcup_{i=1}^{n-1} V_i$. Claramente $\{V_n,\ n \in N^*\}$ é também uma cobertura aberta de S. Seja $x_n \in V_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} V_i$. Observe que $x_{m+1} \in V_{m+1}$ e não pertence a V_n, de fato, x_{n+k} não pertence a V_n, para todo $k \geq 1$. Então (x_n) não tem ponto limite, pois para todo $x \in S$, existe um (aberto) V_m tal que $x \in V_m$ e $V_m \cap \{x_{m+1}, x_{m+2}, ...\} = \emptyset$, o que contraria a hipótese. Assim (S, σ) é enumeravelmente compacto. □

Corolário 4.3.19. *Se (S, σ) é sequencialmente compacto então (S, σ) é enumeravelmente compacto.*

Demonstração. É consequência da Proposição 4.3.18, pois o limite de uma subsequência convergente é, como já observamos, um ponto limite da sequência. □

Corolário 4.3.20. *Um espaço métrico é enumeravelmente compacto se, e somente se, é sequencialmente compacto.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Segue da Proposição 4.3.15, uma vez um espaço métrico é um e_1 espaço e num espaço métrico todo subconjunto unitário é fechado.
$(\Leftarrow)$ Vale para qualquer espaço topológico (corolário anterior).

□

Proposição 4.3.21. *Se (S, σ) é enumeravelmente compacto e $f : (S, \sigma) \to (\mathbb{R}, \sigma_{usual})$ é contínua, então f assume um valor máximo e um mínimo sobre S.*

Demonstração. Mostremos primeiramente que f é limitada superiormente. De fato, se f não é limitada superiormente, para $n = 1$, existe $x_1 \in S$ tal que $f(x_1) > 1$, para $n = 2$ existe x_2 tal que $f(x_2) > max\{1, f(x_1)\}$ e, de modo geral, para cada $n \geq 2$ existe $x_n \in S$ tal que $f(x_n) > max\{n, f(x_{n-1})\}$. Sendo S enumeravelmente compacto e f contínua, seque que $f(S)$ é enumeravelmente compacto, mas a sequência $y_n = f(x_n)$ não tem ponto limite em $f(S)$, visto que para cada $x \in \mathbb{R}$ existe $N > 0$; $x < f(x_N)$. Tomando $\delta \in \mathbb{R}$, $0 < \delta < f(x_N) - x$, tem-se $x \in G =]x - \delta, x + \delta[$ e $G \cap \{y_m,\ m > N\} = \emptyset$, o que nos dá uma contradição pela proposição anterior. Portanto f é limitada superiormente.

Seja então $c = \sup\{f(x) : x \in S\}$. Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, existe $x_n \in S$ tal que

$$c - \frac{1}{n} < f(x_n) < c.$$

Como (S, σ) é enumeravelmente compacto, pela Proposição 4.3.18, toda sequência em S tem um ponto limite, de modo que a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tem um ponto limite $x \in S$, e $f(x)$ será um ponto limite da sequência $(f(x_n))$. Mas $(f(x_n))$ converge para c, logo $f(x) = c$ e f assume o seu valor máximo.

A prova de que f assume um mínimo é análoga. □

4.3.1 Exercícios

1) Encontre um espaço topológico no qual todo subconjunto não enumerável tem um ponto de acumulação, enquanto nenhum subconjunto enumerável tem.

2) Prove que S é enumeravelmente compacto se, e somente se, toda família de fechados tendo a propriedade da interseção finita tem a propriedade da interseção enumerável.

3) Mostre que S é enumeravelmente compacto se, e somente se, quando $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ é uma sequência decrescente de fechados não vazios, então $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} F_n \neq \emptyset$.

4) Mostre que se S é e_2 e enumeravelmente compacto, então toda bijeção contínua $f : S \to T$ é um homeomorfismo.

5) Se S é enumeravelmente compacto e $f : S \to T$ é contínua, então $f(S)$ é enumeravelmente compacto (i. é, prove a Proposição 4.3.10).

6) Mostre que se (S,σ) é compacto e (T,τ) é enumeravelmente compacto, então o produto $S\times T$ com a topologia produto é enumeravelmente compacto.

4.4 Compacidade em Espaços Métricos

Nesta seção mostraremos que para os espaços métricos, a compacidade, a compacidade sequencial, a propriedade de Bolzano-Weierstrass e também a compacidade enumerável são equivalentes.

Definição 4.4.1. *Sejam (M,d) um espaço métrico e $\varepsilon > 0$. Uma ε-**rede** para (M,d) é um subconjunto finito $F = \{x_1,...,x_r\}$ de M tal que, para todo $x \in M$, existe $x_i \in F$ com $d(x,x_i) < \varepsilon$, ou seja $M = B(x_1,\varepsilon)\cup ...\cup B(x_r,\varepsilon)$.*

Definição 4.4.2. *Um espaço métrico (M,d) é **totalmente limitado** ou **pré-compacto** se, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma ε-rede para (M,d), i.é, $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\{x_1,...,x_{r_\varepsilon}\} \subseteq M$ tal que $M = B(x_1,\varepsilon)\cup ...\cup B(x_{r_\varepsilon},\varepsilon)$.*

Observação 4.4.3. *Todo espaço métrico totalmente limitado é limitado. Pois, por exemplo, para $\varepsilon = 1$, existe $\{x_1,...,x_r\} \subseteq M$ tal que $M = B(x_1,1)\cup ...\cup B(x_r,1)$. Tome $c = max\{d(x_i,x_j),\ i \neq j,\ i,j = 1,...,r\}$. Então, $d(M) \leq 2+c$.*

Proposição 4.4.4. *Todo espaço métrico compacto é totalmente limitado.*

Demonstração. Para todo $\varepsilon > 0$, considere a cobertura aberta de M, $M = \bigcup_{x\in M} B(x,\varepsilon)$. Como M é compacto, existe $\{x_1,...,x_{r_\varepsilon}\} \subseteq M$ tal que $M = B(x_1,\varepsilon)\cup ...\cup B(x_{r_\varepsilon},\varepsilon)$, e assim M é totalmente limitado. □

Corolário 4.4.5. *Todo subconjunto compacto K de um espaço métrico M é fechado e limitado.*

Demonstração. Se K é compacto então, pela proposição anterior que K é totalmente limitado e, portanto, pela observação acima, K é limitado. Que K é fechado segue do Corolário 4.1.9. □

Proposição 4.4.6. *Se (M,d) é um espaço métrico sequencialmente compacto, então (M,d) é totalmente limitado.*

Demonstração. Suponhamos que (M,d) não seja totalmente limitado. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que (M,d) não tem uma ε-rede. Seja $x_1 \in M$. Como $\{x_1\}$ não é uma ε-rede, existe $x_2 \in M$ tal que $d(x_1,x_2) > \varepsilon$. Como $\{x_1,x_2\}$ não é uma ε-rede, existe $x_3 \in M$ com $d(x_1,x_3) \geq \varepsilon$ e $d(x_2,x_3) \geq \varepsilon$. Deste modo, define-se $\{x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots\}$ tal que $d(x_n,x_i) \geq \varepsilon$, para todo $i = 1,2,\ldots,n-1$. Temos assim uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que não admite subsequência convergente, dado que $d(x_i,x_j) \geq \varepsilon$, para todo i,j, logo (M,d) não pode ser sequencialmente compacto, o que contradiz a hipótese. $\square$

Corolário 4.4.7. *Todo espaço métrico M sequencialmente compacto é separável, isto é, existe $X \subseteq M$ tal que X é enumerável e denso em M.*

Demonstração. Pela Proposição 4.4.6, (M,d) é totalmente limitado, logo, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, (M,d) tem uma $\frac{1}{n}$ - rede X_n. O subconjunto

$$X := \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} X_n$$

é enumerável e denso em M. (Verifique!) $\square$

Definição 4.4.8. *Sejam (M,d) um espaço métrico e $\{G_i\}_{i\in I}$ uma cobertura de M. Dizemos que um número real $a > 0$ é um **número de Lebesgue** para a cobertura $\{G_i\}_{i\in I}$ de (M,d) se cada subconjunto X de M com diâmetro menor que a está contido em algum G_i da cobertura.*

Note que se a é um número de Lebesgue de uma cobertura então b também é, para todo $0 < b < a$.

Proposição 4.4.9 (Lema da Cobertura de Lebesgue). *Num espaço métrico sequencialmente compacto, toda cobertura aberta tem um número de Lebesgue.*

Demonstração. Seja $\{G_i\}_{i\in I}$ uma cobertura aberta de M. Diremos que um subconjunto $B \subseteq M$ é *grande* se não existe $i \in I$ tal que $B \subseteq G_i$. Temos duas situações a considerar:

1^a) *M não possui subconjuntos grandes*, neste caso qualquer número real serve como número de Lebesgue da cobertura (pois, $\forall\ X \subseteq M, \exists i \in I$ tal que $X \subseteq G_i$, independente do valor do diâmetro $d(X)$).

2^a) *Existem conjuntos grandes* em M. Neste caso considere $a' = inf\{d(B) : B \subseteq M$ e B é grande$\}$ (o ínfimo do conjunto dos diâmetros dos subconjuntos grandes de M), temos $0 \leq a' \leq +\infty$.

• Se $a' = +\infty$, então qualquer número real a serve como número de Lebesgue (visto que, neste caso $d(B) = +\infty$, para todo B grande, e assim, se $d(X) < a$ então X não é grande).

• Se $0 < a' < \infty$, então podemos tomar $a = a'$ como número de Lebesgue.

• Afirmamos que o caso $a' = 0$ não ocorre. De fato, suponhamos $a' = 0$. Note que todo subconjunto grande B tem pelo menos dois pontos e portanto $d(B) = sup\{d(x,y) : x,y \in B\} > 0$. Se $a' = 0$, segue que para todo $n \in \mathbb{N}^*$, existe B_n grande tal que $0 < d(B_n) < 1/n$. Para cada $n \geq 1$, escolha $x_n \in B_n$ e considere a sequência (x_n). Como M é sequencialmente compacto, existe $x \in M$ e uma subsequência (x_{n_i}) de (x_n), tal que $(x_{n_i}) \to x$. Visto que $\{G_i\}_{i\in I}$ é cobertura aberta de M, $x \in G_{i_0}$ para algum $i_0 \in I$. Sendo G_{i_0} um aberto, existe $\delta > 0$ tal que $B(x,\delta) \subseteq G_{i_0}$. Como $(x_{n_i}) \to x$, existe $n_t \in \mathbb{N}^*$ tal que $x_{n_i} \in B(x, \frac{\delta}{2})$, para todo $n_i > n_t$. Escolha $x_{n_{k_0}} \in B(x, \frac{\delta}{2})$, com $n_{k_0} > \max\{n_t, 2/\delta\}$. Do fato de $d(B_{n_{k_0}}) < 1/n_{k_0}$, vem que $\forall\, y \in B_{n_{k_0}}$,

$$d(x,y) \leq d(x, x_{n_{k_0}}) + d(x_{n_{k_0}}, y) < \frac{\delta}{2} + \frac{1}{n_0} < \delta.$$

Assim $B_{n_{k_0}} \subseteq B(x,\delta) \subseteq G_{i_0}$, o que nos dá uma contradição, pois $B_{n_{k_0}}$ é grande. Portanto $a' \neq 0$.

Assim, em qualquer situação existe número de Lebesgue para a cobertura. □

Proposição 4.4.10. *Todo espaço métrico sequencialmente compacto é compacto.*

Demonstração. Sejam (M,d) um espaço métrico sequencialmente compacto e $\{G_i\}_{i\in I}$ um cobertura aberta de M. Seja a um número de Lebesgue para $\{G_i\}_{i\in I}$ e tome $\varepsilon = a/3$. Como vimos, M sequencialmente compacto implica que M é totalmente limitado, logo existe uma ε-rede $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ para M, e, para todo $k = 1, 2, \ldots, m$. Temos que

$$d(B(x_k, \varepsilon)) \leq 2\varepsilon = \frac{2a}{3} < a,$$

logo, como a é um número de Lebesgue da cobertura, para todo k, existe G_{i_k} com $B(x_k, \varepsilon) \subseteq G_{i_k}$. Como

$$M = \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon),$$

a classe finita $\{G_i, G_{i_2}, \ldots, G_{i_m}\}$ é uma subcobertura finita de $\{G_i\}$, donde M é compacto. □

Proposição 4.4.11. *Seja (M,d) um espaço métrico. São equivalentes as seguintes afirmações:*

(i) *M é sequencialmente compacto;*

(ii) *M é compacto;*

(iii) *M tem a propriedade de Bolzano - Weierstrass.*

Demonstração. Que (i) implica (ii) segue da proposição anterior. Que (ii) implica (iii) foi provado na Proposição 4.1.16. Para ver que (iii) implica (i), seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ uma sequência em M e considere $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots\}$. Se A é finito, então claramente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tem uma subsequência convergente. Se A é infinito, segue da hipótese, que existe $x \in A'$ e ainda, x é um w - ponto de acumulação (i. é, as vizinhanças de x possuem infinitos pontos de A, pois o espaço é métrico). Para cada $k \in \mathbb{N}^*$, tome $x_{n_k} \in (B(x, 1/k) - \{x\}) \cap A$, com $n_k > n_{k-1}$. Então $x_{n_k} \to x$. Assim M é sequencialmente compacto. □

Corolário 4.4.12. *Um espaço métrico é compacto se, e somente se, é enumeravelmente compacto.*

Demonstração. Segue do resultado anterior e do Corolário 4.3.14 ou Corolário 4.3.20. □

No resultado seguinte comparamos aplicação contínua com uniformemente contínua quando o domínio é um espaço métrico compacto. Recordemos a definição de uma aplicação uniformemente contínua.

Definição 4.4.13. *Uma aplicação $f : (M,d) \to (N,d')$ é* ***uniformemente contínua*** *se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todos $x,y \in M$, com $d(x,y) < \delta$ tem-se $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Um* ***homeomorfismo uniforme*** *de M em N é um homeomorfismo $f : M \to N$ tal que f e f^{-1} são uniformemente contínuas. Chamamos* ***propriedade uniforme*** *a toda propriedade que é preservada por homeomorfismo uniforme.*

Proposição 4.4.14. *Toda aplicação contínua de um espaço métrico compacto em um espaço métrico qualquer é uniformemente contínua.*

Demonstração. Sejam M e N espaços métricos, com M compacto e $f : M \to N$ uma aplicação contínua. Suponhamos que f não seja uniformemente contínua. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n = 1,\ 2, \ldots$, podemos obter x_n e y_n em M tais que $d(x_n, y_n) < 1/n$ e $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. Como M é compacto, e portanto sequencialmente compacto, a sequência (x_n) possui uma subsequência convergente. Assim, considerando uma subsequência convergente e mudando de notação se necessário, podemos supor que (x_n) converge para $x \in M$ e daí (y_n) também converge para $x \in M$, visto que $d(x_n, y_n) < 1/n$. Do fato que f é contínua, segue que $\lim d(f(x_n), f(y_n)) = d(f(x), f(x)) = 0$, contradizendo a condição $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. Assim f é uniformemente contínua. □

Definição 4.4.15. *Sejam M um conjunto não vazio e d_1, d_2 duas métricas sobre M. Dizemos que as métricas d_1 e d_2 são* ***uniformemente equivalentes*** *se, e somente se, a identidade $id : (M, d_1) \to (M, d_2)$ for um homeomorfismo uniforme.*

Notemos que se d_1 e d_2 são uniformemente equivalentes então d_1 e d_2 são métricas equivalentes.

4.4.1 Exercícios

1) Sejam X um espaço métrico e $f : X \to X$ uma aplicação tal que $d(x,y) = d(f(x), f(y))$, para todo $x,y \in X$ (f é uma imersão isométrica de X em X - vide Exercício 3.1.2-2). Se X é compacto prove que f é um homeomorfismo. (*Sugestão*: claramente f é continua, se mostrar que f é sobrejetora então f será bijetora e, como f^{-1} também será imersão isométrica, f^{-1} será continua. Para ver que f é sobrejetora, tome $y \in X$ e considere a sequência $(y,\ f(y),\ f(f(y)),\ f(f(f(y))),\ \ldots$, isto é, $y_1 = y$, $y_n = f(y_{n-1})$, $n \geq 2$. Como X é compacto, existe uma subsequência convergente de (y_n). Tal subsequência será de Cauchy, assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $d(y_n, y_m) < \varepsilon$, $\forall\ n,\ m \geq n_0$. Daí, $d(y, f(X)) \leq d(y, f(y)) = d(y_1,\ y_2) = d(f(y_1), f(y_2)) = d(y_2, y_3) = \cdots = d(y_{n_0}, y_{n_0+1}) < \varepsilon$. Logo, $d(y, f(X)) = 0$ e como $f(X)$ é fechado $y \in f(X)$.)

2) Um espaço métrico M é compacto se, e somente se, toda função real contínua $f : M \to \mathbb{R}$ é limitada.

3) Seja A um subconjunto de um espaço métrico M. Mostre que A é totalmente limitado se, e somente se, $\overline{A}$ é totalmente limitado.

4) Sejam M e N espaço métricos.

   a) Demonstre que toda aplicação uniformemente contínua $f : M \to N$ leva conjunto totalmente limitado em conjunto totalmente limitado. Conclua que ser totalmente limitado é propriedade uniforme.

   b) Mostre que aplicações contínuas em geral não têm, necessariamente, esta propriedade.

5) a) Se d é uma métrica sobre M mostre que as métricas $\overline{d}(x,y) = min\{1,\ d(x,y)\}$ e $d'(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ são uniformemente equivalentes a d (Lima [14], Cap. 5, Exemplo 10, p. 139). Que são equivalentes, vide Exercício 2.8 - 28.

   b) Se existirem $m,\ k > 0$ tais que $md_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq kd_1(x,y), \forall x,\ y \in M,$ onde então d_1 e d_2 são métricas sobre M, mostre que d_1 e d_2 são métricas uniformemente equivalentes.

   c) Considere as métricas em $\mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$ (métrica usual) e $d_1(x,y) = |x^3 - y^3|$. Mostre que d e d_1 são equivalentes, mas não são uniformemente equivalentes.

6) Se A é um subconjunto compacto de um espaço métrico mostre que o derivado de A é compacto.

4.5 Espaços Localmente Compactos

Nesta seção apresentamos os conceitos de espaço localmente compacto e de compactificação de um espaço topológico. Veremos que os espaços localmente compactos e de Hausdorff, grosseiramente falando, são "compactos a menos de um ponto" no sentido que possuem uma "compactificação por um ponto" (compactificação de Alexandroff).

Definição 4.5.1. *Dizemos que um espaço topológico* (S,σ) *é* ***localmente compacto*** *se, para todo* $x \in S$*, existem* $G \in \sigma$ *e um subconjunto compacto* K *de* S *tal que* $x \in G \subseteq K$ *(ou equivalentemente, existe* K *compacto, tal que* $x \in K^o \subseteq K$*).*

A Definição 4.5.1 diz que um espaço topológico é localmente compacto se, e somente se, todo ponto tem uma vizinhança compacta. Existe uma outra formulação para compacidade local que é equivalente a apresentada aqui quando o espaço é de Hausdorff (vide Exercício 4.6 - 5).

Exemplo 4.5.2. 1) $(\mathbb{R},\sigma_{usual})$ *é localmente compacto (e não é compacto).*

2) (S,σ_{dis}) *é localmente compacto.*

Notemos que $(\mathbb{Q},\sigma)$, com σ induzida da topologia usual de $\mathbb{R}$, não é localmente compacto, pois dado $x\in\mathbb{Q}$, se existisse $G\in\sigma$ e um subconjunto compacto K de $\mathbb{Q}$ tal que $x\in G\subseteq K\subseteq\mathbb{Q}$, podemos supor G básico da forma $]a,b[\,\cap\,\mathbb{Q}$. Tomando $y\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, com $y\in\,]a,b[$, existe sequência (y_n), com $y_n\in\,]a,b[\,\cap\,\mathbb{Q}\subseteq K$ e $(y_n)\to y$. Daí, $y\in\overline{K}=K$ (pois K é fechado visto que K é compacto em $\mathbb{Q}$, que é de Hausdorff), o que é uma contradição, pois $y\notin\mathbb{Q}$.

Nas proposições seguintes são descritas algumas propriedades dos espaços localmente compactos.

Proposição 4.5.3. (i) *Todo espaço compacto é localmente compacto.* (*A recíproca é falsa vide Exemplo 4.5.2* - 1).

(ii) *Subespaço fechado de um espaço localmente compacto é localmente compacto, isto é, se* (S,σ) *é localmente compacto, e* $F\subseteq S$ *é fechado, então* (F,σ_F) *é localmente compacto.*

(iii) *Se para todo ponto* $x\in S$ *existe um aberto* G_x *contendo* x *tal que* $\overline{G_x}$ *é compacto, então* (S,σ) *é localmente compacto. Em espaços de Hausdorff vale a recíproca.*

(iv) *Se* $f:(S,\sigma)\to(T,\tau)$ *é contínua, sobrejetora e aberta, e* (S,σ) *é localmente compacto, então* (T,τ) *é localmente compacto. Consequentemente, compacidade local é propriedade topológica.*

(v) *O produto finito de espaços topológicos* (*com a topologia produto*) *é um espaço localmente compacto se, e somente se, cada um dos fatores é um espaço localmente compacto.*

Demonstração. Exercícios 4.6 - 3 a 6. O item (i) é imediato. $\square$

Proposição 4.5.4. *O produto infinito de espaços topológicos* $S=\prod_{\lambda\in L}S_\lambda$ (*com a topologia produto*) *é localmente compacto se, e somente se, cada* S_λ *é localmente compacto e* S_λ *é compacto para quase todo* $\lambda\in L$*, isto é, exceto um número finito de elementos.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Se S é localmente compacto, para ver que cada S_λ é localmente compacto, use que as projeções $p_\alpha:\prod_{\lambda\in L}S_\lambda\to S_\alpha$ são aplicações continuas, sobrejetoras e abertas. Para concluir que somente um número finito dos S_λ são não compactos, seja $p=(x_\lambda)_{\lambda\in L}\in\prod_{\lambda\in L}S_\lambda$. Por hipótese existe $G\in\sigma_{prod}$ e $K\subseteq\prod_{\lambda\in L}S_\lambda$, K compacto, tal que $p\in G\subseteq K$. Podemos supor G aberto básico, $G=G_{\lambda_1}\times G_{\lambda_2}\times\ldots\times G_{\lambda_r}\times\prod_{\lambda\neq\lambda_i}S_\lambda$. Temos que para cada $\lambda\neq\lambda_i$, $i=1,\ldots,r$, $p_\lambda(G)=S_\lambda$, e visto que $S_\lambda=p_\lambda(G)\subseteq p_\lambda(K)\subseteq S_\lambda$, segue que $S_\lambda=p_\lambda(K)$ e assim S_λ é compacto, se $\lambda\neq\lambda_i$.

$(\Leftarrow)$ Agora suponhamos que cada S_λ é localmente compacto. Se todos os S_λ forem compactos, pelo Teorema de Tychonoff $S=\prod_{\lambda\in L}S_\lambda$ é compacto e portanto localmente compacto. Sejam então $S_{\lambda_1},S_{\lambda_2},\ldots,S_{\lambda_r}$ os espaços não compactos. Tome $p=(p_\lambda)_{\lambda\in L}\in\prod_{\lambda\in L}S_\lambda$. Como $p_{\lambda_i}\in S_{\lambda_i}$ que é localmente compacto, $i=1,\ldots,r$, existem $G_{\lambda_i}\in\sigma_{\lambda_i}$ e K_{λ_i} compacto tais que $p_{\lambda_i}\in G_{\lambda_i}\subseteq K_{\lambda_i}$. Então $p\in G:=G_{\lambda_1}\times G_{\lambda_2}\times\ldots\times G_{\lambda_r}\times\prod_{\lambda\neq\lambda_i}S_\lambda\subseteq K:=K_{\lambda_1}\times K_{\lambda_2}\times\ldots\times K_{\lambda_r}\times\prod_{\lambda\neq\lambda_i}S_\lambda$, com G aberto e K compacto (pelo Teorema de de Tychonoff). $\square$

Observação 4.5.5. $i)$ *Produto infinito de espaços localmente compactos não é, necessariamente, localmente compacto. Por exemplo (vide Exercício 4.6 -10), considerando $\mathbb{R}$ com a topologia usual, $\mathbb{R}^{\omega} = \prod_{n \in \mathbb{N}^*}(\mathbb{R})_n$ com a topologia produto não é localmente compacto (Munkres [20], Cap. 3, §29, Exemplo 2, p. 182).*

$ii)$ Se $f : (S, \sigma) \to (T, \tau)$ é contínua, sobrejetora e (S, σ) é localmente compacto não é verdade, em geral, que (T, τ) é localmente compacto. Tome, por exemplo, $id : (\mathbb{Q}, \mathcal{P}(\mathbb{Q})) \to (\mathbb{Q}, \tau_{usual})$. Tem-se que f é contínua, sobrejetora, $(\mathbb{Q}, \mathcal{P}(\mathbb{Q}))$ é localmente compacto, mas $(\mathbb{Q}, \tau_{usual})$ não é.

4.5.1 Compactificação - Compactificação de Alexandroff

Definição 4.5.6. *Uma **compactificação** de um espaço topológico (S, σ) é um par $((\hat{S}, \hat{\sigma}), h)$, em que:*

(1) *$(\hat{S}, \hat{\sigma})$ é um espaço topológico compacto e de Hausdorff,*

(2) *$h : S \to \hat{S}$ é uma aplicação tal que $h : S \to h(S)$ é um homeomorfismo,*

(3) *$h(S)$ é denso em $\hat{S}$.*

Observação 4.5.7. *A definição acima está de acordo com a apresentada em Sims [23], porém há autores que não exigem que o espaço seja de Hausdorff como, por exemplo, em Lima [14].*

Exemplo 4.5.8. *Se (S, σ) é compacto (e de Hausdorff) então $((S, \sigma), id)$ é uma compactificação de S. Assim, compactificação é interessante para espaços não compactos.*

Exemplo 4.5.9. 1) *Considere $S = \,]0,3[$ com a topologia usual, uma compactificação de S é o par $((\hat{S} = [0,3], \hat{\sigma} = \tau_{usual}), h =$inclusão). Note que $\hat{S} - h(S) = \{0, 3\}$. Agora se consideramos $S = \,]0,3]$, $\hat{S} = [0,3]$ é uma compactificação de $]0,3]$ e $\hat{S} - h(S) = \{0\}$.*

2) *O par $(([-1,1], \tau_{usual}),\ h)$, em que $h : \mathbb{R} \to [-1,1]$ é tal que $h(x) := \dfrac{x}{1+|x|}$, é uma compactificação de $\mathbb{R}$ (com a topologia usual) com $h(\mathbb{R}) = \,]-1,1[$ e $[-1,1] - h(\mathbb{R}) = \{-1,1\}$. Similarmente $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n;\ ||x|| \leq 1\}$ (com a topologia usual) e $h : \mathbb{R}^n \to D^n$; $h(x) = \dfrac{x}{1+||x||}$, é uma compactificação de $\mathbb{R}^n$ (e tem-se $D^n - h(\mathbb{R}^n) = S^{n-1}$).*

3) *S^1 é uma compactificação de $\mathbb{R}$ (com a topologia usual). Mais precisamente, considere o homeomorfismo dado pela projeção estereográfica $\rho : S^1 - \{(0,1)\} \to \mathbb{R}$; $(x,y) \to \dfrac{x}{1-y}$ e $h = j \circ \rho^{-1} : \mathbb{R} \to S^1 - \{(0,1)\} \to S^1$, sendo j a inclusão de $S^1 - \{(0,1)\}$ em S^1 (Exemplo 3.3.4 -3). Verifica-se que $((S^1, \tau_{usual}), h)$ é uma compactificação de $\mathbb{R}$ e tem-se $S^1 - h(\mathbb{R}) = \{(0,1)\}$.*

Definição 4.5.10. *Seja (S, σ) um espaço topológico. Uma **compactificação de Alexandroff** (Alexandrov) ou **compactificação por um ponto**, ou ainda um **compactificado de Alexandroff** de (S, σ) é um par $((S^*, \sigma^*), h)$, em que:*

(1) *(S^*, σ^*) é um espaço topológico compacto e de Hausdorff,*

(2) $h : S \to S^*$ *é uma aplicação tal que* $h : S \to h(S)$ *é um homeomorfismo,*

(3) $S^* = h(S) \cup \{p\}$*, sendo* p *um elemento não pertencente a* $h(S)$.

O ponto p *é usualmente denotado por* w *ou* ∞ *e é chamado* ***ponto no infinito***.

Observação 4.5.11. *Toda compactificação de Alexandroff* $((S^*, \sigma^*), h)$ *de um espaço topológico não compacto* S *é uma compactificação de* S *de acordo com a definição anterior. Para concluir isto basta ver que* $\overline{h(S)} = S^*$. *Claramente* $\overline{h(S)} \subseteq S^*$ *e do item (3) da definição, segue que* $\overline{h(S)} = h(S)$ *ou* $\overline{h(S)} = h(S) \cup \{p\} = S^*$. *Se* $\overline{h(S)} = h(S)$*, então* $h(S)$ *é fechado em* S^* *e portanto compacto. Daí, como* S *é homeomorfo a* $h(S)$*,* S *seria compacto. Como estamos supondo* S *não compacto, segue que* $\overline{h(S)} = S^*$.

Exemplo 4.5.12. S^1 *é uma compactificação de Alexandroff de* $\mathbb{R}$ (*exemplo anterior, item* 3). *Mais geralmente,* S^n *é uma compactificação de Alexandroff de* $\mathbb{R}^n$.

Proposição 4.5.13. *Todo espaço localmente compacto e de Hausdorff possui uma compactificação de Alexandroff.*

Demonstração. Sejam (S, σ) um espaço localmente compacto e de Hausdorff, p um ponto/objeto não pertencente a S e $S^* := S \cup \{p\}$. Tome $h : S \to S^*$ como sendo a inclusão e

$$\sigma^* := \sigma \cup \{G \cup \{p\} : G \in \sigma \text{ e } G^c = S - G \text{ é um subconjunto compacto de } S\}.$$

Então σ^* é uma topologia para S^* (verifique!) e (S^*, σ^*) é um espaço compacto e de Hausdorff.

• (S^*, σ^*) é compacto, pois se $S^* = \bigcup_{\lambda \in L} V_\lambda$, existe V_{λ_0} tal que $p \in V_{\lambda_0}$ e $V_{\lambda_0} = G_{\lambda_0} \cup \{p\}$, com $G_{\lambda_0} \in \sigma$ e $G^c_{\lambda_0} = S - G_{\lambda_0}$ é compacto. Mas então $G^c_{\lambda_0} \subseteq \bigcup_{\lambda \neq \lambda_0} V_\lambda$, onde podemos considerar $V_\lambda \in \sigma$, para todo $\lambda \neq \lambda_0$. Sendo $G^c_{\lambda_0}$ compacto, $G^c_{\lambda_0} = V_{\lambda_1} \cup \ldots \cup V_{\lambda_r}$ e, consequentemente, $S^* = V_{\lambda_0} \cup V_{\lambda_1} \cup \ldots \cup V_{\lambda_r}$.

• Para ver que o espaço é de Hausdorff, observe que se $x \neq y$ com $x, y \in S$ então x e y possuem vizinhanças disjuntas, pois S é de Hausdorff. Consideremos então $x \in S$ e $y = p$. Como S é localmente compacto, existe $G \in \sigma$ tal que $x \in G \subseteq \overline{G}$, com $\overline{G}$ compacto. Neste caso podemos tomar $G_x = G$ e $G_p = (S - \overline{G}) \cup \{p\}$, que são disjuntos e pertencem a σ^*.

A inclusão $h : S \to S^*$ é um homeomorfismo sobre $h(S)$, pois a inclusão é continua, bijetora (sobre $h(S)$) e aberta. Ainda, obviamente, $S^* = h(S) \cup \{p\}$. Assim, o par $((S^*, \sigma^*), h)$ é uma compactificação de Alexandroff de (S, σ). □

Observação 4.5.14. *Pode-se mostrar que os subconjuntos abertos de uma espaço localmente compacto e de Hausdorff são localmente compactos* (*vide Exercício 4.6 - 2, abaixo*). *Disto segue que: "se um espaço* (S, σ) *tem uma compactificação de Alexandroff então, necessariamente, tal espaço é de Hausdorff e localmente compacto"* (*Exercício 4.6 - 11*).

Proposição 4.5.15. (Unicidade a menos de homeomorfismo) *Dado um espaço topológico* (S, σ)*, se* $((S^*, \sigma^*), h)$ *e* $((S^{\circledast}, \sigma^{\circledast}), h')$ *são duas compactificações de Alexandroff de* (S, σ)*, com* $S^* = h(S) \cup \{p\}$ *e* $S^{\circledast} = h'(S) \cup \{p'\}$ *então a aplicação* $\Phi : S^* \to S^{\circledast}$*;* $\Phi(h(s)) = h'(s)$*, se* $s \in S$

(ou equivalentemente, $\Phi(x) = (h' \circ h^{-1})(x)$, se $x \in h(S)$) e $\Phi(p) = p'$, está bem definida e é um homeomorfismo.

Demonstração. Note que em $h(S)$, tem-se que a aplicação Φ é o homeomorfismo sobre $h'(S)$, $h' \circ h^{-1} : h(S) \to h'(S)$. Para ver que Φ é continua em p, seja V um aberto em $S^{\circledast}$ que contém $p' = \Phi(p)$. O complementar $S^{\circledast} - V$ é um fechado em $S^{\circledast}$ e portanto compacto contido em $h'(S)$. Assim existe um compacto $K \subseteq h(S)$ tal que $\Phi(K) = S^{\circledast} - V$. Como S^* é de Hausdorff, K é fechado em S^*, e assim $U = S^* - K = K^c$ é um aberto de S^*, com $p \in A$. Agora, $S^{\circledast} - V = \Phi(K) = \Phi(X^* - U)$. Como Φ é uma bijeção entre X^* e $X^{\circledast}$, $\Phi(X^* - U) = X^{\circledast} - \Phi(U)$, e então $S^{\circledast} - V = X^{\circledast} - \Phi(U)$, donde segue que $V = \Phi(U)$ e portanto Φ é continua em p. Que Φ é um homeomorfismo segue do Exercício 4.1.1 - 8, observando que Φ é uma aplicação contínua e bijetora do espaço compacto X^* no espaço Hausdorff $X^{\circledast}$. □

(O resultado anterior é apresentado em Lima [14], Cap. 7, §5, Prop. 22, p. 206.)

4.6 Exercícios

1) Prove que um espaço topológico Hausdorff é localmente compacto se, e somente se, cada ponto possui uma base local de abertos que tem fechos compactos. Ou seja, se S é Hausdorff, então S é localmente compacto se, e somente se, dado x em S, para todo aberto U de S contendo x, existe um aberto V, contendo x, tal que $\overline{V} \subseteq U$ e $\overline{V}$ é compacto. (Munkres [20], Cap. 3, §29, Teor. 29.2, p. 185.)

2) Se (S, σ) é localmente compacto e de Hausdorff e $A \subseteq S$ é aberto, mostre que (A, σ_A) é localmente compacto. (*Sugestão*: dado $x \in A$, pelo exercício anterior, existe uma aberto V de S tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq A$, com $\overline{V}$ compacto.)

3) Se (S, σ) é localmente compacto e $F \subseteq S$ é fechado, mostre que (F, σ_F) é localmente compacto (item (ii) da Proposição 4.5.3). (Munkres [20], Cap. 3, §29, Corol. 29.3, p. 185.)

4) Prove que se S é de Hausdorff e localmente compacto então para todo ponto $x \in S$ existe um aberto G_x, contendo x, tal que $\overline{G_x}$ é compacto (Proposição 4.5.3, item (iii) - recíproca). (*Sugestão*: observe que $x \in G \subseteq K$, com G aberto e K compacto, implica $\overline{G} \subseteq \overline{K} = K$, visto que compacto em Hausdorff é fechado. Disto segue que o fechado $\overline{G}$ é compacto.)

5) Prove que se $f : (S, \sigma) \to (T, \tau)$ é contínua, sobrejetora e aberta, e (S, σ) é localmente compacto, então (T, τ) é localmente compacto. Conclua que compacidade local é propriedade topológica. (Proposição 4.5.3, item (iv)).

6) Prove que o produto $S_1 \times S_2$ é localmente compacto se, e somente se, cada um dos fatores S_1, S_2 é localmente compacto. Estenda o resultado para um número finito de espaços. (Proposição 4.5.3, item (v)).

7) Demonstre que um subespaço A de um espaço localmente compacto e Hausdorff S é localmente compacto se, e somente se, A é interseção de um aberto G com um fechado F de S. (Dugundji [5], Cap. 11, Teorema 6.5, p. 239.)

8) Mostre que, se T é um espaço de Hausdorff e $S \subseteq T$ é denso e localmente compacto em T, então S é aberto em T. (Lima [14], Cap. 7, §5, Corol. 2, p. 201.)

9) Um espaço topológico S diz-se ***compactamente gerado*** se satisfaz a seguinte condição: G é aberto em S se, e somente se, $G \cap K$ é aberto em K, para todo compacto K em S. Mostre que todo espaço localmente compacto S é compactamente gerado. (Munkres, [20], Cap. 7, §46, Def. e Lema 46.3, p. 283.)
Observação: supondo S Hausdorff, a definição de compactamente gerado é equivalente à definição de k- espaço dada anteriormente no Exercício 4.1.1 -13 (Munkres, [20], Cap. 7, §46, p. 283.)

10) Considere em $\mathbb{R}$ a topologia usual. Mostre que $\mathbb{R}^\omega$, com a topologia produto, não é localmente compacto (Observação 4.5.5- i). (*Sugestão*: Suponha $\mathbb{R}^\omega$ localmente compacto então, para $x = (0,0,...) \in \mathbb{R}^\omega$ existe um aberto, que podemos supor básico (em que na posição k, $k \geq n+1$ tenhamos sempre $\mathbb{R}$) $G =]a_1,b_1[\times \cdots \times]a_n,b_n[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$ e um compacto K de $\mathbb{R}^\omega$ tal que $x \in G \subseteq K$. Observe que a restrição da projeção, $p_{n+1}|_K\colon K \to \mathbb{R}$, é contínua e sobrejetora, o que nos dá uma contradição, uma vez que $\mathbb{R}$ não é compacto.)

11) Prove que se (S,σ) tem uma compactificação de Alexandroff $((S^*,\sigma^*),\ h)$ então (S,σ) é de Hausdorff e localmente compacto. (*Sugestão*: se $S^* = h(S) \cup \{p\}$, como S^* é de Hausdorff então $\{p\}$ é fechado em S^* e assim $h(S) = S^* - \{p\}$ é um aberto de S^*. Agora S^* é um espaço de Hausdorff e localmente compacto (pois é compacto) e, portanto, $h(S)$ será de Hausdorff e localmente compacto (pelo Exercício 2 anterior). Assim S é homeomorfo a $h(S)$ que é de Hausdorff e localmente compacto.)

Capítulo 5

Conexão

"A matemática nasce quando uma pessoa abstrai todas as características individuais da dualidade que resulta em consequência do aumento no tempo. A forma vazia que permanece, que é comum a todas essas dualidades, é a intuição primária da matemática. Ela é repetida sem fim e dá origem a novos objetos matemáticos."

(Luitzen E. J. Brouwer)

Um espaço topológico é conexo se, a grosso modo, é constituído de uma única "peça-componente" relativamente a topologia dada. Neste capítulo introduzimos a noção de conexão e consideramos os vários tipos de conexão. Mostramos que conexão é uma propriedade topológica e demonstramos que os subconjuntos conexos da reta real são os intervalos. Uma consequência deste fato é o Teorema do Valor Intermediário para funções contínuas $f : X \to \mathbb{R}$, que afirma que uma função contínua de um espaço conexo na reta real tem como imagem um intervalo.

5.1 Espaços Conexos

Definição 5.1.1. *Dizemos que um espaço topológico* (S,σ) *é* ***conexo*** *se não pode ser representado como uma reunião de dois abertos disjuntos e não vazios, ou seja, não existem* $G,\ H \in \sigma$*, não vazios, disjuntos, tais que* $S = G \cup H$*. Caso contrário dizemos que* (S,σ) *é* ***desconexo****. Um subconjunto* $A \subseteq S$ *é dito conexo se* (A,σ_A) *é conexo.*

Observação 5.1.2. $i)$ *Da definição dada segue que* (S,σ) *é conexo se, e somente se, para todos* $G,H \in \sigma$ *com* $S = G \cup H$ *e* $G \cap H = \emptyset$*, tem-se* $G = \emptyset$ *ou* $H = \emptyset$*. Ainda,* (S,σ) *é desconexo se existem* $G,\ H \in \sigma - \{\emptyset\}$ *tais que* $G \cap H = \emptyset$ *e* $S = G \cup H$*. Neste caso dizemos que G e H proporcionam uma desconexão de S e denota-se, às vezes,* $S = G \,\dot\cup\, H$ *ou* $S = G \mid H$*.*

$ii)$ *Se* $S = G \cup H$ *com G e H abertos disjuntos, então G e H são também subconjuntos fechados de S. Como consequência,* (S,σ) *é conexo se, e somente se, os únicos subconjuntos abertos e fechados de S são* $\emptyset$ *e S (verifique!).*

Exemplo 5.1.3. 1) *(S,σ_{cao}) é conexo, sendo S não vazio e $\sigma_{cao} = \{\emptyset, S\}$ a topologia caótica.*

2) *Seja S um conjunto infinito e considere em S a topologia cofinita σ_{cof}. Então (S,σ_{cof}) é um espaço topológico conexo.*

3) *Se S tem pelos menos dois pontos então (S,σ_{dis}) é desconexo, onde σ_{dis} denota a topologia discreta.*

4) *Todo subconjunto unitário de um espaço topológico é conexo. Também, $\emptyset$ é conexo, pois não contradiz a definição.*

Consideremos agora algumas propriedades de conexão.

Proposição 5.1.4. (i) *A propriedade de um subespaço ser conexo é intrínseca, isto é, se (A,τ) é conexo e (S,σ) é qualquer espaço topológico tal que $A \subseteq S$ e $\tau = \sigma_A$, então A é um subconjunto conexo de (S,σ).*

(ii) *Sejam (T,σ) um espaço topológico e $A \subseteq S \subseteq T$. Considere em S e A a topologia induzida de T. Se $A \subseteq T$ é conexo, então $A \subseteq S$ também é, ou seja, A também é conexo quando visto como subespaço de S.*

Demonstração. Exercício. □

Proposição 5.1.5. *A imagem contínua de conexo é conexo.*

Demonstração. Sejam (S,σ) um espaço conexo e $f : (S,\sigma) \to (T,\tau)$ uma aplicação contínua. Sem perda de generalidade podemos supor f sobrejetora, pois $f(S) \subseteq T$ é conexo se, e somente se, $(f(S),\sigma_{f(S)})$ é conexo. Isto posto, se $T = f(S)$ fosse desconexo, existiriam G e H abertos disjuntos e não vazios tais que $T = G \cup H$, e assim

$$S = f^{-1}(T) = f^{-1}(G \cup H) = f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H),$$

onde $f^{-1}(G)$ e $f^{-1}(H)$ são abertos disjuntos não vazios em S. Logo S seria desconexo, o que nos dá uma contradição. □

Corolário 5.1.6. *Conexão é uma propriedade topológica.*

Proposição 5.1.7. *Sejam (S,σ) um espaço topológico e A um subespaço conexo de S. Se $B \subseteq S$ é tal que $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, então B é conexo. Em particular $\overline{A}$ é conexo.*

Demonstração. Se $B \subseteq S$ fosse desconexo existiriam abertos, não vazios e disjuntos, $G = G_1 \cap B$ e $H = H_1 \cap B$ em B, com $G_1, H_1 \in \sigma$, tais que $B = G \cup H$. Assim,

$$A = B \cap A = (G \cup H) \cap A = (G_1 \cap A) \cup (H_1 \cap A),$$

onde $G_1 \cap A$ e $H_1 \cap A$ são abertos disjuntos em A. Além disso, $G_1 \cap A \neq \emptyset \neq H_1 \cap A$, pois como $G \neq \emptyset$, existe $x \in G$, então $x \in G_1 \in \sigma$ e $x \in B \subseteq \overline{A}$ e, daí, $G_1 \cap A \neq \emptyset$, e analogamente, $H_1 \cap A \neq \emptyset$. Logo A seria desconexo, contrariando a hipótese. □

Proposição 5.1.8. *Em $\mathbb{R}$ com a topologia usual, um subconjunto não vazio e não unitário $A \subseteq \mathbb{R}$ é conexo se, e somente se, A é um intervalo.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Mostraremos que se A não é um intervalo, então A não é conexo. De fato, se A não é um intervalo, existem $x, y \in A$ e $z \in \mathbb{R} - A$ tais que $x < z < y$. Assim, os conjuntos $G =]-\infty, z[\ \cap A$ e $H = A \cap\ ]z, +\infty[$ são abertos em A, não vazios, disjuntos e $A = G \cup H$. Logo A é desconexo.

$(\Leftarrow)$ Seja A um intervalo e suponhamos, por absurdo, que $A = G \cup H$, com G e H abertos em A, disjuntos, e $G \neq \emptyset \neq H$. Então existem $x, y \in A$ com $x \in G$ e $y \in H$. Podemos supor $x < y$ já que $x \neq y$. Como A é um intervalo, $[x, y] \subseteq A$, de modo que, se $a \in [x, y]$, tem-se $a \in A$ e assim $a \in G$ ou $a \in H$. Seja $z = \sup([x, y] \cap G)$. Segue que $x \leq z \leq y$, e portanto $z \in A$. Como G é também fechado em A, $z \in G$ e, em consequência, z não pertence a H (já que $G \cap H = \emptyset$) e então $z \neq y$, logo $z < y$. Assim, pela definição de z, $z + \varepsilon \in H$, para todo $\varepsilon > 0$ tal que $z + \varepsilon \leq y$. Como H é fechado em A, segue que $z \in H$, o que nos dá uma contradição (pois z não pertence a H). Portanto A é conexo. □

Proposição 5.1.9 (Teorema do Valor Intermediário)**.** *Sejam (S, σ) um espaço topológico conexo e $f : (S, \sigma) \to (\mathbb{R}, \sigma_{usual})$ uma função contínua. Então*

(i) *$f(S)$ é um intervalo.*

(ii) *Se $u,\ v \in f(S)$ e $w \in \mathbb{R}$ é tal que $u < w < v$, então existe $x \in S$ tal que $f(x) = w$.*

Demonstração. (i) Segue das Proposições 5.1.5 e 5.1.8.

(ii) É consequência imediata de (i). □

Corolário 5.1.10. (Teorema do Ponto Fixo de Brower em $\mathbb{R}$) *Se $f : [a, b] \to [a, b]$ é contínua então existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.*

Demonstração. Note que se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$, então não há nada a demonstrar. Suponhamos $f(a) \neq a$ e $f(b) \neq b$. Considere $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = x - f(x)$. Tem-se que g é contínua, e $g(a) < 0 < g(b)$. O resultado segue então da proposição anterior. □

Proposição 5.1.11. *Um espaço topológico (S, σ) é desconexo se, e somente se, existe uma função $f : S \to \{0, 1\}$ contínua e sobrejetora (considerando $\{0, 1\}$ com a topologia discreta).*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponhamos S desconexo. Então existem abertos disjuntos e não vazios G e H tais que $S = G \cup H$. Neste caso, a função $f : S \to \{0, 1\}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in G, \\ 1, & \text{se } x \in H, \end{cases}$$

é contínua e sobrejetora.

($\Leftarrow$) Suponhamos que exista $f : S \to \{0,1\}$ contínua e sobrejetora. Sejam $G = f^{-1}(\{0\})$ e $H = f^{-1}(\{1\})$. Temos G e H abertos, disjuntos e não vazios de S, e

$$S = f^{-1}(\{0,1\}) = f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{1\}) = G \cup H,$$

donde segue que S é desconexo. $\square$

Corolário 5.1.12. *Um espaço topológico (S,σ) é conexo se, e somente se, as únicas funções contínuas $f : S \to \{0,1\}$ são as constantes.*

Proposição 5.1.13. *Seja S um espaço topológico. Se $\{A_i\}_{i\in I}$ é uma família de subconjuntos conexos de S, não vazios e tais que $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$, então $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ é conexo.*

Demonstração. Exercício. $\square$

Proposição 5.1.14. *O produto cartesiano de dois espaços topológicos é um espaço conexo (com a topologia produto) se, e somente se cada um dos espaços é conexo.*

Demonstração. Sejam (S,σ) e (T,τ) espaços topológicos. ($\Rightarrow$) Use que as projeções $p_1 : S \times T \to S$ e $p_2 : S \times T \to T$ são contínuas. (Exercício).

($\Leftarrow$) Suponhamos que (S,σ) e (T,τ) sejam espaços conexos. Consideremos a topologia produto em $S \times T$, e seja $f : S \times T \to \{0,1\}$ uma aplicação contínua. Para cada $(a,b) \in S \times T$, definimos

$$\begin{cases} i^b : S \to S \times T, & \text{por } i^b(x) = (x,b); \\ i_a : T \to S \times T, & \text{por } i_a(y) = (a,y). \end{cases}$$

i_a e i^b são contínuas, logo $f^b = f \circ i^b$ e $f_a = f \circ i_a$ são aplicações contínuas de S e T em $\{0,1\}$, respectivamente. Para cada para $(a,b) \in S \times T$, como S e T são conexos, $f^b : S \to \{0,1\}$ e $f_a : T \to \{0,1\}$ são constantes e assumem o valor $k = f(a,b) \in \{0,1\}$. Assim, fixado (a,b) e considerando $k = f(a,b)$, se $(c,d) \in S \times T$ é um outro elemento qualquer, temos

$$f(c,d) = f^d(c) = f^d(a) = f(a,d) = f_a(d) = f_a(b) = f(a,b) = k,$$

de modo que f é constante. Portanto $S \times T$ é conexo. $\square$

Corolário 5.1.15. *Se (S_i,σ_i), $i = 1,2,\ldots,n$, são espaços topológicos conexos, então $\prod_{i=1}^n S_i$ é conexo.*

Corolário 5.1.16. *$\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ são conexos.*

Observação 5.1.17. *i) Vale um resultado mais geral: "se $(S_\lambda,\ \sigma_\lambda)$, $\lambda \in L$ é uma família de espaços conexos então $(\prod_{\lambda\in L} S_\lambda,\ \sigma_{prod})$ é um espaço conexo" - Exercício 5.1.1-12 abaixo. (Munkres (a first course) [19], Cap.* 3, *§*$3-1$, *Teor.* 1.6, *p. 150, ou Lima [14], Cap. 9, §4, Prop. 10 a, p. 254.)*

ii) Pode-se verificar que, considerando $\mathbb{R}$ com a topologia usual (espaço conexo), o espaço $\mathbb{R}^w := \prod_{k\in\mathbb{N}} (\mathbb{R})_k$ com a topologia Box não é conexo, uma vez que o conjunto A de todas as sequências limitadas é aberto e fechado em $\mathbb{R}^w$. (Munkres [20], Cap.3, §23, Exemplo 6, *p.* 151.)

5.1.1 Exercícios

1) Mostre que um espaço topológico é conexo se, e somente se, não pode ser descrito como a reunião de dois conjuntos fechados, disjuntos e não vazios.

2) Prove que (S,σ) é conexo se, e somente se, para todo $G \in \sigma$, $G \neq \emptyset$ e $G \neq S$ tem-se $Fr(G) \neq \emptyset$.

3) Mostre que a reunião de dois conexos com um ponto em comum é conexo. (*Sugestão*: usar o Corolário 5.1.12.) Generalize este resultado (ou seja, prove a Proposição 5.1.13).

4) Seja $S = G \cup H$, onde G e H são abertos disjuntos e não vazios, uma desconexão de um espaço topológico S. Mostre que para todo subconjunto conexo A de S, teremos $A \cap G = \emptyset$ ou $A \cap H = \emptyset$, e assim $A \subseteq G$ ou $A \subseteq H$.

5) Mostre que (S,σ) é conexo se, e somente se, para todos $p,\ q \in S$, existe um subespaço conexo de S contendo p e q.

6) Diz-se que dois subconjuntos não vazios A e B de um espaço topológico S são ***conjuntos separados*** em S se A e B são disjuntos e $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$. Seja S um espaço topológico.

   a) Se A e B são subconjuntos não vazios de S, separados, prove que $A \cup B$ é desconexo. (*Sugestão*: $A \cup B = [(A \cup B) \cap (\overline{B})^c)] \cup [(A \cup B) \cap (\overline{A})^c].$)

   b) Se $A \cup B$ é uma desconexão de $X \subset S$, sendo $A = G \cap X$ e $B = H \cap X$, G e H abertos de S, prove que A e B são separados.

   c) Mostre que $X \subseteq S$ é desconexo se, e somente se, X é a reunião de dois conjuntos não vazios separados.

7) Demonstre que o gráfico de uma função real contínua definida sobre um intervalo é um subconjunto conexo do plano.

8) Seja S um espaço topológico conexo. Se existe uma função real contínua e não constante $f : S \to \mathbb{R}$, prove que S é infinito e não enumerável.

9) Se (S,σ) tem um subconjunto A conexo e denso, prove que S é conexo.

10) Sejam $A \subseteq S$, onde A e S são conexos. Se U é um subconjunto aberto e fechado em $S - A$ prove que $A \cup U$ é conexo. (Munkres [20], Cap. 3, §23, Exerc. 12, p. 15.)

11) Prove que os espaços abaixo não são homeomorfos. (*Sugestão*: usar o fato que $f : S \to T$ homeomorfismo implica que $f : S - \{p\} \to T - \{f(p)\}$ também é homeomorfismo.)

   a) Um intervalo aberto e um intervalo fechado na reta real.

   b) A circunferência $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ com a topologia usual induzida do plano e um intervalo da reta real.

12) Se $\{(S_\lambda,\ \sigma_\lambda),\ \lambda \in L\}$ é uma família de espaços conexos então $(\prod_{\lambda\in L} S_\lambda,\ \sigma_{prod})$ é um espaço conexo. (*Sugestão*: considere um ponto arbitrário $p = (p_\lambda)_{\lambda\in L} \in S$. Para cada subconjunto finito $F = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ de L, seja $S_F = S_{\lambda_1} \times ...S_{\lambda_n} \times \prod_{\lambda\neq\lambda_i}\{p_\lambda\}$. Então $p \in S_F$, S_F é conexo e $W = \bigcup_{F\subseteq\ L;\ F finito} S_F$ é conexo. Agora, $S = \overline{W}$, pois todo aberto elementar $U_{\lambda_1} \times ...U_{\lambda_n} \times \prod_{\lambda\neq\lambda_i}\{S_\lambda\}$ contém algum ponto de W.)

5.2 Componentes Conexas

Nesta seção mostraremos que todo espaço topológico se decompõe como uma reunião disjunta de subespaços conexos maximais.

Definição 5.2.1. *Seja S um espaço topológico. Um subespaço conexo e maximal de S, isto é, um subespaço conexo que não está contido propriamente em nenhum subconjunto conexo de S, é chamado uma* ***componente conexa*** *de S.*

Exemplo 5.2.2. 1) *Se S é conexo, então S tem somente uma componente conexa.*

2) *Num espaço discreto, as componentes conexas são os conjuntos unitários.*

3) *Em $\mathbb{Q}$ com a topologia usual, as componentes conexas são conjuntos unitários. Note que esse espaço não é discreto.*

Proposição 5.2.3. *Seja S um espaço topológico. Então:*

(i) *Todo subespaço conexo de S está contido em uma componente conexa de S.*

(ii) *As componentes conexas de S* (*distintas*) *são subconjuntos* (*conexos*) *disjuntos.*

(iii) *Cada ponto p de S pertence a exatamente uma componente conexa de S, que denotaremos por C_p, e nos referimos como a componente conexa de p.*

(iv) *Cada componente conexa de S é um subconjunto fechado.*

(v) *Um subconjunto não vazio de S, conexo, que é aberto e fechado é uma componente conexa de S.*

Demonstração. (i) Imediata.

(ii) Sejam G e H componentes conexas de S. Se existe $p \in G\cap H$ então $G\cup H$ é conexo. Como $G \subseteq G\cup H$ e G é conexo maximal, tem-se $G = G\cup H$ e assim $H \subseteq G$. Como também H é um conexo maximal, o mesmo se aplica, logo $G \subseteq H$. Portanto $G = H$.

(iii) Dado $p \in S$, $\{p\}$ é conexo e assim existe (por (ı) e (ii)) um único conexo maximal que contém $\{p\}$.

(iv) O fecho de um subconjunto conexo $A \subseteq S$ é conexo (Proposição 5.1.7), de modo que se A é uma componente conexa de S, então $A = \overline{A}$, pois A é maximal e $A \subseteq \overline{A}$. Portanto A é fechado.

(v) Seja $A \subseteq S$ aberto, fechado, conexo e não vazio. Vamos mostrar que A é uma componente conexa. Seja $B \subseteq S$, B conexo, tal que $A \subseteq B$. Como A é aberto e fechado, $B = A \cup (B - A)$ é reunião disjunta dos abertos A e $B - A$ de B. Como B é conexo, devemos ter $A = \emptyset$ ou $B - A = \emptyset$, logo $B - A = \emptyset$, visto que A é não vazio, e assim $B = A$. Portanto A é uma componente conexa, pois é um conexo que não está contido propriamente em nenhum outro subconjunto conexo B de S. $\square$

Observação 5.2.4. *i) A condição* (iii) *da proposição anterior nos diz que o conjunto das componentes conexas de S forma uma partição do conjunto S.*

ii) Uma componente conexa não é necessariamente um conjunto aberto. Por exemplo, no espaço topológico $(\mathbb{Q}, \sigma_{usual})$*, as componentes conexas são conjuntos unitários, que não são conjuntos abertos.*

5.2.1 Exercícios

1) Seja S é um espaço topológico. Defina em S uma relação R por:

$$xRy \;\Leftrightarrow\; \exists\, A \subseteq S \text{ conexo tal que } x, y \in A.$$

   Prove que R é uma relação de equivalência. Mostre que a classe de equivalência de um elemento qualquer p de S é a componente conexa C_p de S (a componente conexa que contém p).

2) Seja (S, σ) espaço topológico. Se $p \in S$ e X é a reunião de todos os subconjuntos conexos que contem p, mostre que $X = C_p$.

3) Se um espaço topológico S tem um número finito de componentes conexas, mostre que essas componentes conexas são conjuntos abertos do espaço S. Em particular, se S é finito toda componente conexa de S é um aberto de S.

5.3 Espaços Localmente Conexos

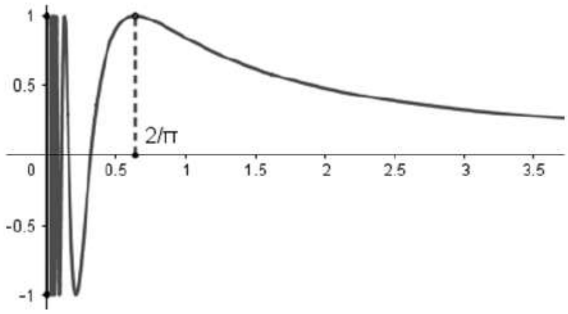
Definição 5.3.1. *Um espaço topológico S é **localmente conexo em** $p \in S$ se, todo aberto G, com $p \in G$, contém um aberto conexo ao qual p pertence. Dizemos que um espaço é **localmente conexo** se ele é localmente conexo em todos os seus pontos.*

Observação 5.3.2. *Um espaço topológico S é localmente conexo se todo ponto de S tem uma base local de abertos conexos.*

Exemplo 5.3.3. $(\mathbb{R}, \sigma_{usual})$ *e, mais geralmente,* $(\mathbb{R}^n, \sigma_{usual})$ *são espaços localmente conexos.*

Observação 5.3.4. *i) Localmente conexo não implica conexo. Por exemplo,* $S = [0,1] \cup [2,3] \subseteq \mathbb{R}$, *com a topologia usual, é localmente conexo e não é conexo.*

ii) Conexo não implica localmente conexo. Considere, por exemplo, $S = A \cup B$, *onde* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \ \ e \ -1 \leq y \leq 1\}$ *e* $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = sen\frac{1}{x} \ , \ \ x > 0\}$, *com a topologia usual. Temos que* S *é conexo, pois* $S = \overline{B}$ *e* B *é conexo, mas* S *não é localmente conexo já que* $(0,0)$ *não tem vizinhança conexa em* X.



Espaço topológico conexo que não é localmente conexo

Proposição 5.3.5. *Sejam* S *um espaço localmente conexo e* Y *um subconjunto aberto de* S. *Então toda componente conexa de* Y *é aberta em* S. *Em particular, toda componente conexa de* S *é aberta (quando* S *é localmente conexo).*

Demonstração. Sejam $Y \subseteq S$ um aberto, A uma componente conexa de Y e $p \in A$. Como S é localmente conexo, existe um aberto conexo G tal que $p \in G \subseteq Y$, pois Y é um aberto que contém p. Como A é a componente conexa de p em Y, temos $G \subseteq A$ e, consequentemente, A é aberto. □

5.3.1 Exercícios

1) Mostre que todo subconjunto conexo de $(\mathbb{R}, \sigma_{usual})$ é localmente conexo.

2) Sejam S e T espaços topológicos. Prove que, se S é localmente conexo, $f : S \to T$ uma aplicação contínua, sobrejetora e aberta, então T é localmente conexo. Conclua que ser localmente conexo é propriedade topológica.

3) Sejam S_1 e S_2 espaços topológicos. Mostre que $S_1 \times S_2$ (com a topologia produto) é localmente conexo se, e somente se, S_1 e S_2 são localmente conexos. Prove que o produto finito de espaços localmente conexos é localmente conexo.

4) Ser localmente conexo é uma propriedade hereditária? Justifique. (*Sugestão*: tome $(\mathbb{R}, \tau_{usual})$ e $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.)

5) Prove que um espaço compacto e localmente conexo tem um número finito de componentes conexas.

6) Prove que o produto $S = \prod_{\lambda \in L} S_\lambda$ (com a topologia produto) é localmente conexo se, e somente se todos os fatores S_λ são localmente conexos e, com exceção de um número finito deles, todos são conexos. (*Sugestão*: Para a prova da implicação ($\Leftarrow$) use que o produto de espaços conexos é conexo, Exercício 5.1.1 -12. (Lima [14], Cap. 9, Corol. 2, p. 254).)

5.4 Espaços Conexos por Caminhos

Nesta seção consideraremos a noção de conexo por caminhos. Um dos resultados principais, que é fundamental nas aplicações, é que um aberto conexo de $\mathbb{R}^n$ ou de C^n é conexo por caminhos.

Aqui S será sempre um espaço topológico com uma topologia σ e $I = [0,1]$ o intervalo da reta real com a topologia usual (induzida da topologia usual da reta).

Definição 5.4.1. *Um **caminho** ou uma **curva** em S é uma aplicação contínua $\gamma : I \to S$. Os pontos $p = \gamma(0)$ e $q = \gamma(1)$ são chamados **ponto inicial** e **ponto final** do caminho γ, respectivamente. A orientação em γ é sempre a induzida da de $[0,1]$.*

Observação 5.4.2. *Se γ é um caminho de p a q, isto é, com ponto inicial p e final q, então $\rho : I \to S$, tal que $\rho(t) = \gamma(1-t)$ é um caminho de q a p e tem a orientação oposta da de γ. ρ é chamado o **caminho inverso** do caminho γ, e é denotado por γ^{-1}.*

Definição 5.4.3. *Dados dois caminhos $\alpha : I \to S$ e $\beta : I \to S$, com $\alpha(1) = \beta(0)$, podemos definir o caminho $\gamma : I \to S$;*

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \textit{se } 0 \le t \le 1/2, \\ \beta(2t-1), & \textit{se } 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

*Tal caminho é chamado **caminho produto** (ou **justaposto**) dos caminhos α e β e é usualmente denotado por $\alpha * \beta$ ou $\alpha \vee \beta$.*

Definição 5.4.4. *Dizemos que um espaço topológico (S,σ) é **conexo por caminhos** (abreviadamente, **c.p.c.**), se quaisquer que sejam $p, q \in S$, existe um caminho $\gamma : I \to S$ tal que $p = \gamma(0)$ e $q = \gamma(1)$.*

Observação 5.4.5. *Sejam S um espaço topológico e $y_0 \in S$. Então S é c.p.c. se, e somente se, para todo $y \in S$, existe um caminho de y_0 a y. Isto é justificado usando caminho inverso e produto de caminhos.*

Exemplo 5.4.6. 1) $(\mathbb{R}^n, \sigma_{usual})$ *é c.p.c., pois dados p e q em $\mathbb{R}^n$ existe, por exemplo, o caminho "segmento de reta" $\gamma(t) = (1-t)p + tq$, $t \in [0,1]$, tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$.*

2) *O espaço de Sierpinski $(\{0,1\}, \sigma)$, onde $\sigma = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$ é conexo por caminhos. (Por exemplo, $\alpha : I \to \{0,1\}$; $\alpha(t) = 0$, se $0 \le t < 1/2$, e $\alpha(t) = 1$, se $1/2 \le t \le 1$, é um caminho ligando* 0 *a* 1).

3) *A esfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$ é c.p.c. (com a topologia induzida de $\mathbb{R}^{n+1}$).*

Proposição 5.4.7. *Se (S,σ) é um espaço topológico conexo por caminhos, então (S,σ) é conexo.*

Demonstração. Se (S,σ) for desconexo, existe uma desconexão $S = G \cup H$ com $G \neq \emptyset \neq H$, G e H abertos disjuntos. Sejam $p \in G$ e $q \in H$. Como S é conexo por caminhos, existe $\gamma : I \to S$ caminho ligando p a q. Então $\gamma(I) \subseteq S$ é conexo, pois é imagem do conexo I por uma aplicação contínua. Mas a desconexão de S induz uma desconexão de $\gamma(I)$, $\gamma(I) = (\gamma(I) \cap G) \cup (\gamma(I) \cap H)$, o que é uma contradição. Portanto S deve ser conexo. □

Observação 5.4.8. *Conexo não implica conexo por caminhos. Por exemplo, o espaço $S = A \cup B$, onde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0$ e $-1 \leq y \leq 1\}$ e $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y = sen\frac{1}{x}\ ,\ x > 0\}$, com a topologia usual do plano $\mathbb{R}^2$, é conexo (vide Observação 5.3.4 - ii) e não é conexo por caminhos, pois, por exemplo, o ponto $(0,1)$ não pode ser ligado a nenhum ponto de B.*

A proposição seguinte nos dá as propriedades principais dos espaços topológicos conexos por caminhos.

Proposição 5.4.9. (i) *A imagem de um espaço conexo por caminhos por uma aplicação contínua é um espaço conexo por caminhos.*

(ii) *Quociente de um espaço c.p.c. é c.p.c. (com a topologia quociente).*

(iii) *Produto de dois espaços c.p.c. é c.p.c. (com a topologia produto).*

Demonstração. (i) Seja $f : (S,\sigma) \to (T,\tau)$ contínua com (S,σ) conexo por caminhos. Dados $p,q \in f(S)$, existem $x,y \in S$ tais que $p = f(x)$ e $q = f(y)$. Como S é c.p.c., existe um caminho $\gamma : I \to S$, com $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Então, $f \circ \gamma : I \to T$ é um caminho de p a q contido em $f(S)$. Logo $f(S)$ é c.p.c.

(ii) Se $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência sobre S, a aplicação quociente $q : S \to S/\mathcal{R}$ é contínua e sobrejetora, assim o resultado segue do item (i).

(iii) Sejam (S,σ) e (T,τ) espaços topológicos conexos por caminhos. Dados $(p_1,q_1),(p_2,q_2) \in S \times T$, com a topologia produto, existem caminhos $\gamma_1 : I \to S$ e $\gamma_2 : I \to T$ tais que $\gamma_1(0) = p_1$, $\gamma_1(1) = p_2$, $\gamma_2(0) = q_1$ e $\gamma_2(1) = q_2$. A aplicação $\gamma : I \to S \times T$, dada por $\gamma(t) = (\gamma_1(t),\gamma_2(t))$ define um caminho em $S \times T$ de (p_1,q_1) a (p_2,q_2), como é fácil ver. □

Observação 5.4.10. *De forma similar prova-se o resultado mais geral: "se $(S_\lambda,\ \sigma_\lambda)$, $\lambda \in L$, é uma família de espaços conexos por caminhos então $(\prod_{\lambda \in L} S_\lambda,\ \sigma_{prod})$ é um espaço conexo por caminhos" (Exercício 5.5 - 17).*

Definição 5.4.11. *Uma* ***componente conexa por caminhos*** *de um espaço topológico (S,σ) é um subconjunto de S que é conexo por caminhos e maximal.*

Observação 5.4.12. *Componentes conexas por caminhos não são necessariamente fechadas. Também, o fecho de um conjunto conexo por caminhos não é, necessariamente conexo por caminhos. De fato, considere* $X = A \cup B$, *onde* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \ e \ -1 \leq y \leq 1\}$ *e* $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = sen\frac{1}{x},\ x > 0\}$, *com a topologia usual. Temos que B é c.p.c., mas* $\overline{B} = X$ *não o é (observação anterior). Também B não é fechado pois* $B \neq \overline{B}$. *Note que B é uma componente, pois B é c.p.c. e é maximal.*

Proposição 5.4.13. *São equivalentes as seguintes afirmações:*

(i) *Toda componente conexa por caminhos de S é aberta.*

(ii) *Todo ponto de S tem uma vizinhança conexa por caminhos.*

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) Seja $p \in S$. Por hipótese a componente conexa por caminhos que contém p é aberta, logo é uma vizinhança de p conexa por caminhos.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sejam $A \subseteq S$ uma componente conexa por caminhos e $p \in A$. Por hipótese o ponto p tem uma vizinhança U conexa por caminhos, de modo que, por ser A a componente c.p.c. de p, tem-se que $p \in U \subseteq A$, e assim, A é aberto. □

Proposição 5.4.14. *Um espaço topológico* (S, σ) *é c.p.c. se, e somente se, S é conexo e todo* $y \in S$ *tem uma vizinhança c.p.c.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ S é conexo, pois como vimos, c.p.c. implica conexo. E todo ponto $y \in S$ tem uma vizinhança c.p.c. (tome, por exemplo, o próprio S).

$(\Leftarrow)$ Seja $y_0 \in S$. Mostremos que a componente conexa por caminhos de y_0 é S. De fato, seja $A = \{y \in S : \text{existe caminho de } y \text{ a } y_0\}$. Claramente A é c.p. c. e $y_0 \in A$.

Ainda, A é aberto, pois dado $y \in A$, existe um caminho γ_1 de y a y_0, assim se G é uma vizinhança c.p.c. de y, qualquer que seja $z \in G$, existe um caminho γ_2 de z a y, logo o caminho produto (ou justaposto) $\gamma_2 * \gamma_1$ é um caminho de z a y_0, ou seja, $z \in A$, deste modo $y \in G \subseteq A$.

A é fechado, pois dado $y \in S - A = A^c$, por hipótese existe uma vizinhança G de y em S que é c.p.c.. Então $G \cap A = \emptyset$ já que a existência de $z \in G \cap A$ proporcionaria um caminho de y_0 a y, e y pertenceria a A. Logo $G \subseteq A^c$ e portanto A^c é aberto.

Assim, A é aberto, fechado e não vazio. Como S é conexo, segue que $S = A$ e portanto S é conexo por caminhos (maximal contendo y_0). □

Corolário 5.4.15. *Um aberto* A *do* $\mathbb{R}^n$ *com a topologia usual é conexo se, e somente se, é conexo por caminhos.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Seja A um subconjunto aberto e conexo do $\mathbb{R}^n$. Então, para todo ponto p de A existe uma bola aberta de centro p e raio r contida em A, e essa é uma vizinhança conexa por caminhos. Logo A é c.p.c. pela proposição anterior.

($\Leftarrow$) Todo espaço c.p.c é conexo (já provado na Proposição 5.4.7). $\square$

Definição 5.4.16. *Dizemos que um espaço topológico (S,σ) é* ***localmente conexo por caminhos*** *se, para todo $p \in S$ e todo aberto $G \in \sigma$ com $p \in G$, existe $U \in \sigma$, conexo por caminhos, tal que $p \in U \subseteq G$.*

Corolário 5.4.17. *Seja (S,σ) um espaço topológico localmente conexo por caminhos. Então S é conexo por caminhos se, e somente se, S é conexo.*

Demonstração. Já vimos que conexo por caminhos implica em conexo. Suponhamos S conexo e localmente conexo por caminhos. Se S é localmente conexo por caminhos então todo ponto $p \in G = S$ tem uma vizinhança conexa por caminhos e assim o resultado segue da proposição anterior. $\square$

Observação 5.4.18. *$i)$ Localmente conexo por caminhos não implica em conexo por caminhos. Por exemplo, $S = [0,3[\, \cup\,]5,9[$ é localmente conexo por caminhos mas não é conexo por caminhos.*

$ii)$ Também, conexo por caminhos não implica em localmente conexo por caminhos. O espaço (usualmente referido como "pente") $S = \overline{X}$ (em $\mathbb{R}^2$), em que $X := \{(\frac{1}{n}, y);\ 0 \leq y \leq 1;\ n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{((x,\ 0);\ 0 < x \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ é um exemplo de espaço conexo por caminhos que não é localmente conexo por caminhos, pois, por exemplo, para $p = (0,1)$ e $G = B(p,1/2) \cap S$, não existe $U \subseteq G$; $p \in U$ e U é c.p.c.

Proposição 5.4.19. *As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *S é localmente conexo por caminhos;*

(ii) *as componentes conexas por caminhos de qualquer conjunto aberto do espaço S são conjuntos abertos;*

(iii) *os conjuntos abertos conexos por caminhos de S formam uma base para a topologia de S.*

Demonstração. Exercício. $\square$

5.5 Exercícios Gerais

1) Mostre que se $f : S \to T$ é um homeomorfismo entre espaços topológicos e A é uma componente conexa de S, então $f(A)$ é uma componente conexa de T. Consequentemente, S e T possuem o mesmo número de componentes conexas.

2) Mostre que as letras X e Y vistas como subespaços do plano (figuras/desenhos em $\mathbb{R}^2$) não são espaços homeomorfos. Idem para as letras A e B.

3) Separe os algarismos arábicos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 vistos como subespaços de $\mathbb{R}^2$ (figuras/ desenhos em $\mathbb{R}^2$), em classes de espaços homeomorfos.

4) Seja E um subconjunto aberto de um intervalo $]a,b[\subseteq \mathbb{R}$, com a topologia usual. Mostre que as componentes conexas de E são intervalos abertos. Além disso, se existe um número infinito dessas componentes, seus diâmetros tendem a zero.

5) Mostre que um espaço métrico M é localmente conexo num ponto $p \in M$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $d(x,p) < \delta$ então existe $C \subseteq M$, C conexo com $x, p \in C$ e o diâmetro $d(C) < \varepsilon$.

6) Mostre que se $p \in A \cap B$ e A e B são localmente conexos em p, então $A \cap B$ não necessariamente é localmente conexo em p. (*Sugestão*: tome $A = \{(x,0) : x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\}$ e $B = \{(0,0)\} \cup \{(x,\ x\ sen(1/x)) : x > 0\}$, ambos são localmente conexos em $p = (0,0)$, mas a interseção não é.)

7) Prove que se um espaço localmente conexo X pode ser representado como a reunião de dois conjuntos fechados A e B, com interseção localmente conexa, então os conjuntos A e B são localmente conexos. (*Sugestão*: Tome $p \in A$ e analise os casos $p \in A \setminus B = X \setminus B$ (um aberto) e $p \in A \cap B$.)

8) Sejam E um subconjunto arbitrário de um espaço localmente conexo e A uma componente conexa de E. Prove que $Fr(A) \subseteq Fr(E)$.

9) Sejam Y compacto e $y \in Y$. Mostre que a componente conexa de y é a interseção de todos os conjuntos abertos e fechados que contêm y.

10) Sejam Y compacto e conexo e $A \subseteq Y$ fechado. Prove que existe um conjunto fechado e conexo $B \supseteq A$ tal que nenhum subconjunto conexo próprio de B contém A.

11) Prove que não existe bijeção contínua entre $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ e qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$, e que não existe função contínua e sobrejetora de S^1 em $\mathbb{R}$.

12) Seja S compacto. Defina uma relação de equivalência $\mathcal{R}$ sobre S como se segue

$$x\,\mathcal{R}\,y \;\Leftrightarrow\; \forall\, f : S \to \mathbb{R} \text{ contínua com } f(x) = 0 \text{ e } f(y) = 1,\ \exists\, u \in S \text{ com } f(u) = \frac{1}{2}.$$

Mostre que as classe de equivalência desta relação são as componentes conexas de S.

13) Sejam Y compacto e $f : Y \to Y$ contínua. Prove que existe um subconjunto não vazio e fechado A de Y tal que $A = f(A)$.

14) Prove que se um conjunto conexo C num espaço X intersecta um conjunto E e o seu complementar $X - E$, então C intersecta a fronteira de E.

15) Prove que se $f : X \to Y$ é uma aplicação fechada de um espaço localmente conexo X sobre um espaço Y, então Y é localmente conexo. Em consequência, toda imagem contínua do intervalo unitário $I = [0,1]$ num espaço de Hausdorff é localmente conexa.

16) Demonstre a recíproca do item (iii) da Proposição 5.4.9, isto é, se $S \times T$ é conexo por caminhos, então S e T são conexos por caminhos.

17) Seja $(S_\lambda,\ \sigma_\lambda)$, $\lambda \in L$, uma família de espaços topológicos. Prove que o espaço produto $(\prod_{\lambda \in L} S_\lambda,\ \sigma_{prod})$ é conexo por caminhos, se e somente, $(S_\lambda, \sigma_\lambda)$ é conexo por caminho, para todo $\lambda \in L$.

18) Prove que todo espaço localmente conexo por caminhos é localmente conexo.

19) A reunião de uma família de subespaços c.p.c. com interseção não vazia é c.p.c.? Justifique.

20) Se as componentes conexas de todos os subespaços abertos de um espaço (S, σ) são conjuntos abertos, mostre que S é localmente conexo.

21) Se $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ é uma sequência de conjuntos conexos num espaço topológico S, tais que $X_i \cap X_{i+1} \neq \emptyset$, para todo $i \in \mathbb{N}^*$, mostre que $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ é conexo.

5.6 Espaços Totalmente Desconexos

Definição 5.6.1. *Um espaço topológico (S, σ) é **totalmente desconexo** quando os seus únicos subconjuntos conexos são $\emptyset$ e os conjuntos unitários.*

Exemplo 5.6.2. 1) (S, σ_{dis}) *é totalmente desconexo.*

2) $(\mathbb{Q}, \sigma_{usual})$ *é totalmente desconexo.*

3) $(\mathbb{I}, \sigma_{usual})$*, onde $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é o conjunto dos números irracionais, é totalmente desconexo.*

4) (K, σ_{usual})*, onde K é o conjunto de Cantor, é totalmente desconexo.*

Proposição 5.6.3. *Seja S um espaço de Hausdorff. Se S tem uma base de abertos cujos conjuntos são também fechados, então S é totalmente desconexo.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{B} = \{B_\lambda : \lambda \in L\}$ uma base para σ, com B_λ aberto e fechado, para todo $\lambda \in L$. Considere A uma componente conexa de S e suponhamos $p,\ q \in A$, com $p \neq q$. Como S é de Hausdorff, existem abertos básicos (e fechados) B_1 e B_2, com $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, $p \in B_1$ e $q \in B_2$. Daí $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_1^c)$ é reunião disjunta de abertos (de A) não vazios, pois $p \in A \cap B_1$ e $q \in A \cap B_2 \subseteq A \cap B_1^c$, o que implica que A é desconexo. Portanto, se A é conexo, então A não pode conter mais de um ponto, o que conclui a prova. $\square$

Observação 5.6.4. *Um espaço totalmente desconexo pode não ser de Hausdorff, como no exemplo seguinte.*

Exemplo 5.6.5. *Considere* $X = \mathbb{Q} \times \{-1, 1\}$ *com a topologia usual e* S *o espaço obtido de* X *identificando os pontos* $(q, -1)$ *e* $(q,\ 1)$ *para todo* $q \in \mathbb{Q}$*, exceto para* $q = 0$*. Então* $S = X/\sim$ *com a topologia quociente é totalmente desconexo* (*verifique !*)*, mas não é de Hausdorff, pois para os pontos* $\overline{(0,1)} = \{(0,1)\}$ *e* $\overline{(0,-1)} = \{(0,-1)\}$ *do espaço quociente* S *não existem abertos disjuntos que os contenham.*

Definição 5.6.6. *Dizemos que um espaço topológico* (S, σ) *é* ***totalmente separado*** *se dois pontos quaisquer de* S *podem ser separados por uma desconexão de* S*, isto é,*

$$\forall\, p,\, q \in S,\ \exists\, U, V \in \sigma \text{ com } S = U \cup V,\ U \cap V = \emptyset,\ p \in U,\ q \in V.$$

Proposição 5.6.7. *As componentes conexas de um espaço totalmente separado são seus conjuntos unitários e assim todo espaço totalmente separado é totalmente desconexo.*

Demonstração. Seja C uma componente conexa num espaço totalmente separado (S, σ). Queremos mostrar que C tem um único ponto. Suponhamos que a e b sejam pontos de C. Se $a \neq b$, existem $U,\ V \in \sigma$ com $S\ = U \cup V$; $a \in U,\ b \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Então obtemos uma desconexão de $C = (U \cap C) \cup (V \cap C)$, o que contradiz o fato de C ser conexo. □

Observação 5.6.8. i) *Obviamente, se* S *é totalmente separado então* S *é de Hausdorff.*

ii) *Um espaço pode ser totalmente desconexo e não ser totalmente separado. Por exemplo, o espaço definido no exemplo anterior é totalmente desconexo mas não é totalmente separado* (*uma vez que não é de Hausdorff*)*.*

5.6.1 Exercícios

1) Se S é um espaço de Hausdorff, finito, mostre que S é totalmente desconexo.

2) Prove que o produto de dois espaços totalmente desconexos é totalmente desconexo.

3) Prove que um espaço totalmente desconexo, compacto e de Hausdorff é homeomorfo a um subespaço fechado de um produto cartesiano de espaços discretos constituídos de dois pontos.

Capítulo 6

Axiomas de Separação - Metrizabilidade

"A Teoria dos Conjuntos obteve os seus maiores êxitos no emprego dos conjuntos de pontos do espaço, no esclarecimento e precisão das noções básicas da geometria."

(Felix Hausdorff - 1914)

6.1 Introdução

As propriedades de um espaço topológico dependem primeiro, é claro, de sua topologia. A cardinalidade da topologia desempenha um papel fundamental: (S,σ) separável, e_1 ou e_2. Por outro lado, quanto maior é a topologia σ, mais provável é de $f:(S,\sigma)\to(T,\tau)$ ser contínua, e quanto menor for τ, a chance de f ser contínua é também maior. Uma questão interessante é: quais propriedades um espaço topológico deve satisfazer para ser metrizável. Nessa direção, os axiomas de separação desempenham papel importante. Um dos principais resultados deste capítulo é o Teorema de Metrização de Urysohn.

Os axiomas de separação tratam da "separação" de pontos e de conjuntos fechados de um espaço topológico, no sentido que: *dois subconjuntos de um espaço topológico estão separados se admitem vizinhanças disjuntas.*

Os axiomas de separação são divididos em três grupos: axiomas de *separação de pontos*, axiomas de *separação de ponto e conjunto fechado* e axiomas de *separação de conjuntos fechados*. Os axiomas são sempre representados pela letra T com um índice i: T_i. T é a letra inicial da palavra *trennungsaxiom* que significa axioma de separação em alemão e i não é necessariamente um inteiro! A nomenclatura usada é a dos matemáticos Alexandroff e Hopf.

6.2 Separação de Pontos

Os axiomas que se referem a separação de pontos são T_0, T_1, T_2 e $T_{\frac{5}{2}}$.

Definição 6.2.1. *Um espaço topológico (S,σ)* ***satisfaz o axioma de separação T_0*** *ou é um* ***T_0 espaço*** *se, para todos $x,y\in S$, com $x\neq y$, existe $U\in\sigma$ tal que $x\in U$ e $y\in U^c=S-U$, ou $y\in U$ e $x\in U^c$.*

Exemplo 6.2.2. *Sejam* $S = \{a,b,c\}$, $\sigma = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, S\}$, $\sigma_{cao} = \{\emptyset, S\}$. *Então* (S,σ) *satisfaz* T_0 *e* (S,σ_{cao}) *não satisfaz* T_0.

Definição 6.2.3. *Um espaço topológico* (S,σ) ***satisfaz o axioma de separação T₁*** *ou é um* ***T₁ espaço*** *se, para todos* $x,y \in S$ *com* $x \neq y$, *existem* $U,V \in \sigma$ *tais que* $x \in U$, $y \in U^c$, *e* $y \in V$, $x \in V^c$.

Exemplo 6.2.4. *Sejam* $S = \{a,b,c\}$, $\sigma_{dis} = \mathcal{P}(S)$ *e* $\sigma = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, S\}$ (*como no exemplo anterior*). *Então* (S,σ_{dis}) *satisfaz o axioma* T_1, *no entanto* (S,σ) *não satisfaz* T_1, *pois o único aberto que contém c é S, de modo que a e c não estarão separados.*

Observação 6.2.5. *Se um espaço topológico* (S,σ) *satisfaz* T_1, *então S satisfaz* T_0. *A recíproca não é verdadeira. De fato, como vimos, tomando* $S = \{a,b,c\}$ *com a topologia* $\sigma = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, S\}$ (S,σ) *satisfaz* T_0, *mas não satisfaz* T_1.

Proposição 6.2.6. *Um espaço topológico* (S,σ) *é* T_1 *se, e somente se,* $\overline{\{x\}} = \{x\}$, *para todo* $x \in S$.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponhamos que exista $y \in \overline{\{x\}} - \{x\}$. Como S é T_1, existem abertos U e V tais que $x \in U$, $y \in U^c = S - U$, $y \in V$ e $x \in V^c$. Agora, como $y \in \overline{\{x\}}$, todo aberto que contém y intersecta $\{x\}$, logo $V \cap \{x\} \neq \emptyset$ e assim, $x \in V$, o que é absurdo, pois $x \in V^c$. Portanto $\overline{\{x\}} - \{x\} = \emptyset$, isto é, $\overline{\{x\}} = \{x\}$.

$(\Leftarrow)$ Dados $x,y \in S$, $x \neq y$, temos, pela hipótese, que $\{x\}$ e $\{y\}$ são fechados, logo os abertos $U = \{y\}^c$ e $V = \{x\}^c$ verificam o axioma T_1. □

Definição 6.2.7. *Um espaço topológico* (S,σ) ***satisfaz o axioma de separação T₂*** *ou é um* ***T₂ espaço*** *se, para todos* $x,y \in S$, *com* $x \neq y$, *existem abertos* U *e* V *com* $x \in U$, $y \in V$ *e* $U \cap V = \emptyset$. *Ou seja,* (S,σ) *ser* T_2 *espaço é o mesmo que* (S,σ) *ser Hausdorff* (*Definição 2.1.10*).

Claramente, se (S,σ) *é* T_2 *espaço então* (S,σ) *é* T_1.

Exemplo 6.2.8. 1) *Todo espaço métrico satisfaz o axioma* T_2.

2) *Seja S um conjunto infinito. S com a topologia cofinita não satisfaz o axioma de separação* T_2, *em particular* $(\mathbb{R},\sigma_{cof})$ *não é* T_2 (*como vimos no Exemplo 2.1.14*). *Note que* (S,σ_{cof}) *é* T_1. *Assim* $T_1 \not\Rightarrow T_2$.

Definição 6.2.9. *Um espaço topológico* (S,σ) ***satisfaz o axioma*** $\boldsymbol{T_{\frac{5}{2}}}$ *ou é um* $\boldsymbol{T_{\frac{5}{2}}}$ ***espaço*** *se, para todos* $x,y \in S$, $x \neq y$, *existem abertos* U *e* V *com* $x \in U$, $y \in V$ *e* $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. *Um espaço que satisfaz o axioma* $T_{\frac{5}{2}}$ *é também chamado* ***espaço de Urysohn***.

Exemplo 6.2.10. *Todo espaço métrico satisfaz o axioma* $T_{\frac{5}{2}}$.

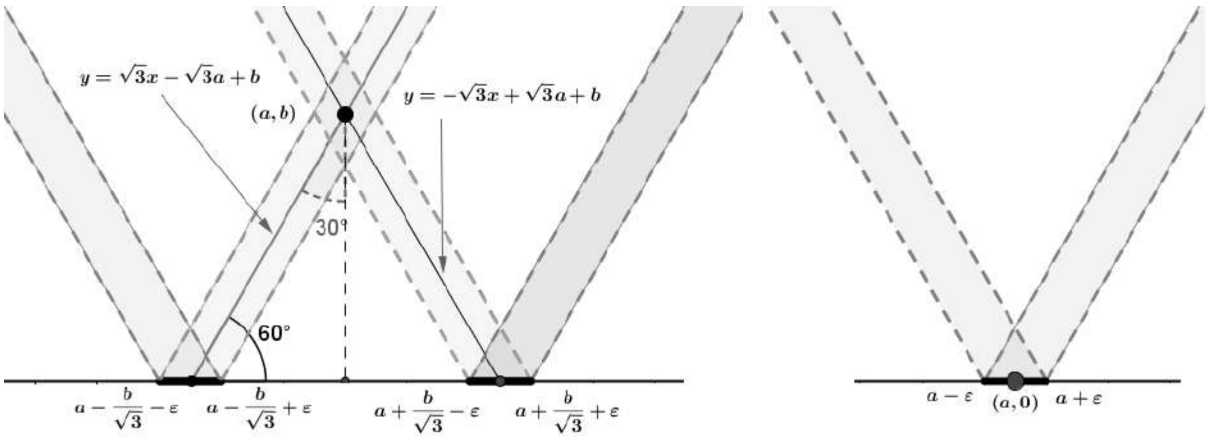
Observação 6.2.11. $T_{\frac{5}{2}} \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

Exemplo 6.2.12 (Bing)**.** *Vejamos um exemplo de espaço que é T_2, mas* não *é $T_{\frac{5}{2}}$. Seja* $S = \{(x,y) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} : \ y \geq 0\}$. *Dados* $(a,b) \in S$ *e* $\varepsilon > 0$, *considere*

$$V_\varepsilon(a,b) = \left\{(r,0) \in S : \ \left| r - \left(a + \frac{b}{\sqrt{3}}\right)\right| < \varepsilon \ ou \ \left| r - \left(a - \frac{b}{\sqrt{3}}\right)\right| < \varepsilon \right\} \cup \{(a,b)\},$$

$V_\varepsilon(a,b)$ é uma ε-vizinhança de (a,b). Se $b = 0$, a ε-vizinhança de $(a,0)$ é o conjunto dos números <u>*racionais*</u> *entre $a-\varepsilon$ e $a+\varepsilon$. O conjunto de todas estas vizinhanças é base para uma topologia σ sobre S (σ é formada por todos subconjuntos U de S satisfazendo a condição de que para cada $(a,b) \in U$ existe um número $\varepsilon > 0$ tal que $V_\varepsilon(a,b) \subseteq U$). Com essa topologia S satisfaz o axioma T_2, mas* não *satisfaz o axioma $T_{\frac{5}{2}}$, pois a interseção dos fechos de dois elementos quaisquer de $\sigma - \{\emptyset\}$ é um conjunto não vazio.*

(*Na figura seguinte apresentamos um esboço de como obter uma vizinhança e seu fecho, lembrando que temos que considerar a interseção com $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$.*)

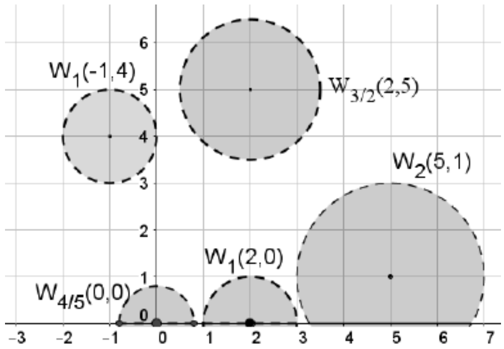


Fecho de $V_\varepsilon(a,b)$ Fecho de $V_\varepsilon(a,0)$

Exemplo 6.2.13 (Moore)**.** *Sejam* $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq 0\}$, $d : S\times S \to \mathbb{R}$ *a restrição da métrica usual do plano $\mathbb{R}^2$ e $B((a,b),\varepsilon)$ a bola (em $\mathbb{R}^2$) de centro (a,b) e raio $\varepsilon > 0$. Considere o subconjunto de S, $L = \{(x,0) \ : \ x \in \mathbb{R}\}$. Para todo $p = (a,b) \in S$ e $\varepsilon > 0$, definimos $W_\varepsilon(a,b)$ da seguinte forma:*

$$\begin{cases} W_\varepsilon(a,b) = B((a,b),\varepsilon) \cap S & se\ (a,b) \in S - L; \\ W_\varepsilon(a,0) = [B((a,0),\varepsilon) \cap (S-L)] \cup \{(a,0)\} & se\ (a,b) = (a,0) \in L. \end{cases}$$

$\{W_\varepsilon(a,b) \ : \ (a,b) \in S, \ \varepsilon > 0\}$ é base para uma topologia σ sobre S. Se p, $q \in S$, $p \neq q$, então $d(p,q) = \|p-q\| = 3\varepsilon$, para algum $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon = \frac{1}{3}d(p,q)$) e, para tal ε, $\overline{W_\varepsilon(p)} \cap \overline{W_\varepsilon(q)} = \emptyset$, de modo que (S,σ) satisfaz $T_{\frac{5}{2}}$. Ilustramos a seguir algumas vizinhanças.



Algumas Vizinhanças

6.2.1 Exercícios

1) Mostre que ser $T_{\frac{5}{2}}$ espaço implica ser T_2 espaço.

2) Mostre que ser T_i, $i = 0, 1, 2, \frac{5}{2}$, é propriedade hereditária, transferível para o produto e propriedade topológica.

3) Verifique que o limite de uma sequência em um T_2 espaço (Hausdorff) quando existe é único. Em particular isso vale para espaços métricos.

4) Prove que (S, σ) é T_0 se, e somente se, $x \neq y$ implica $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

5) Prove que se (S, σ) é um espaço finito que satisfaz o axioma T_1 então a topologia σ em S é necessariamente a topologia discreta (afirmação feita na Observação 2.2.13 - *iv*).

6) Seja (S, σ) um espaço e_1 e T_1. Se $x \in S$ e $A \subseteq S$, mostre que $x \in A'$ se, e somente se, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de pontos de A, distintos dois a dois, convergindo para x. (*Sugestão*: considere uma base local encaixada para x, $\mathfrak{B}_x = \{B_1, B_2, ...\}$. Use que em T_1 espaços, $x \in A'$ se, e somente se, x é um ω-ponto de acumulação de A (ou seja, $U \cap A$ é um conjunto infinito, para todo $U \in \sigma$ que contém x) e que $A' = \emptyset$ se S for finito (vide Observação 2.2.13 - *i* e *iv*) e assim obtenha $x_1 \in B_1 \cap (A - \{x\})$, $x_2 \in B_2 \cap (A - \{x\})$, com $x_2 \neq x_1$, etc.)

7) Seja (S, σ) um espaço topológico e_1 no qual o limite de uma sequência quando existe é único. Prove que (S, σ) é T_2. (*Sugestão*: tome $x \neq y$, $\mathfrak{B}_x = \{U_1, U_2, ...\}$ e $\mathfrak{B}_y = \{V_1, V_2, ...\}$ bases locais encaixadas. Se não for T_2, existe $z_n \in U_n \cap V_n$, para cada n. Mostre que $z_n \to x$ e $z_n \to y$.)

8) Seja $f : (S, \sigma) \to (T, \tau)$ sobrejetora e fechada, onde (S, σ) satisfaz o axioma T_1. Mostre que (T, τ) também é um espaço T_1. (*Sugestão*: dado $p = f(x_0)$ em T, $\{x_0\}$ é fechado em S.)

9) Dizemos que um espaço topológico (S, σ) satisfaz o axioma T_D se o conjunto derivado $\{x\}'$ é fechado, para todo $x \in S$. Mostre que T_D é uma propriedade hereditária, que implica T_0 e que é implicada por T_1. (*Sugestão*: para ver que é T_0 note que $x \notin \{x\}'$ e analise os casos $y \in \{x\}'$ e $y \notin \{x\}'$, $x \neq y$.)

10) Sejam θ um número irracional e $S = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_+$ munido da seguinte topologia: uma vizinhança de $(a,b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_+$ é qualquer conjunto que contém este ponto e que contém um conjunto da forma $\{(r,0) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_+ : |r-(a+\theta b)| < \varepsilon \text{ ou } |r-(a-\theta b)| < \varepsilon\}$. (Tal topologia é referida como *topologia de inclinação irracional* $\frac{1}{\theta}$ (*irrational slope topology*), vide Steen e Seebach [27], p. 93. Note que o Exemplo 6.2.12 (de Bing) é um caso particular dessa situação por considerar $\frac{1}{\theta} = \sqrt{3}$.)

a) Demonstre que o espaço é enumerável, de Hausdorff e conexo.

b) Verifique que qualquer função contínua $f : S \to \mathbb{R}$ é constante.

6.3 Separação de Ponto e Conjunto Fechado

Definição 6.3.1. *Dizemos que um espaço topológico (S,σ) é* ***regular*** *se, para todo $p \in S$ e todo $F \subseteq S - \{p\}$, com F fechado, existem G_1, $G_2 \in \sigma$ com $p \in G_1$, $F \subseteq G_2$ e $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.*

Exemplo 6.3.2. $(S = \{1,2,3\}, \sigma = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, S\})$ *é um espaço regular.*

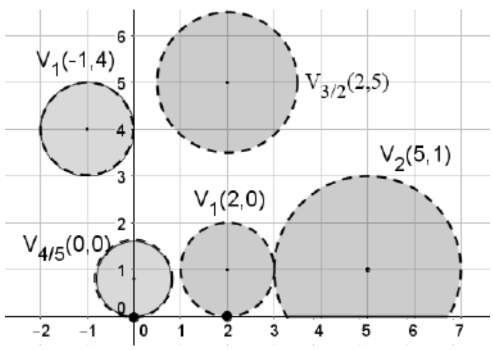
Observação 6.3.3. (S,σ) *regular não implica que (S,σ) seja T_1 espaço (vide exemplo anterior).*

Exemplo 6.3.4. *O Exemplo de Moore satisfaz $T_{\frac{5}{2}}$ (como visto), mas não é regular, pois não é possível separar o ponto $p = (0,0)$ e o fechado $F = L - \{p\}$.*

Exemplo 6.3.5. *Seja $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq 0\}$. Se $(a,b) \in S$ e $\varepsilon > 0$, considere*

$$\begin{cases} V_\varepsilon(a,b) = \{(x,y) \in S : (x-a)^2 + (y-b)^2 < \varepsilon^2\} = B((a,b),\varepsilon) \cap S, & se\ b > 0; \\ V_\varepsilon(a,0) = \{(x,y) \in S : (x-a)^2 + (y-\varepsilon)^2 < \varepsilon^2\} \ \cup \ \{(a,0)\}, & se\ b = 0. \end{cases}$$

Então $\mathcal{B} = \{V_\varepsilon(a,b) : (a,b) \in S \text{ e } \varepsilon > 0\}$ é base para uma topologia σ sobre S. Note que a topologia de S assim obtida é diferente da dada no Exemplo de Moore, pois as vizinhanças do tipo $V_\varepsilon(a,0)$ e $W_\varepsilon(a,0)$ não coincidem. Afirmamos que (S,σ) é regular. De fato, como no Exemplo de Moore, o único problema que aparece é separar $(0,0)$ de $F = L - \{(0,0)\}$, onde $L = \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\}$. Seja $\varepsilon > 0$ e considere $U = V_\varepsilon(0,0)$. Para cada $(a,0) \in F$, tome $\varepsilon_a > 0$ tal que $V_{\varepsilon_a}(a,0) \cap V_\varepsilon(0,0) = \emptyset$. Então $V = \bigcup_{a \in \mathbb{R}-\{0\}} V_{\varepsilon_a}(a,0) \supseteq F$ e $U \cap V = \emptyset$. Portanto (S,σ) é regular.



Algumas Vizinhanças

Definição 6.3.6. *Um espaço topológico (S,σ) **satisfaz o axioma de separação T_3** ou é **T_3 espaço** se é T_1 e regular.*

Exemplo 6.3.7. 1) *Dado $S \neq \emptyset$, $(S,\mathcal{P}(S))$ é um T_3 espaço.*

2) *Todo espaço métrico é regular e T_3 espaço. (Exercício 6.3.1 - 2.)*

3) *O Exemplo de Moore não é um T_3 espaço (pois não é regular). Note que o espaço é T_1, T_2 e $T_{\frac{5}{2}}$.*

Observação 6.3.8. *i) Se (S,σ) é T_3 então (S,σ) é T_2. De fato, sejam $x,y \in S$, com $x \neq y$. Como S é T_1, $F := \{y\}$ é fechado, com $x \notin F$. Assim, como S é regular, existem G_1, $G_2 \in \sigma$ com $x \in G_1$, $F = \{y\} \subseteq G_2$ e $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, ou seja, G_1 e G_2 são abertos disjuntos tais que $x \in G_1$ e $y \in G_2$. Portanto (S,σ) é T_2 (Hausdorff).*

ii) Em razão do item i), alguns autores na definição do axioma de separação T_3 já exigem que o espaço seja T_2 (Hausdorff) ao invés de T_1.

iii) Há também autores (como, por exemplo, Munkres [20]), que definem espaço regular como sendo um espaço que é T_3 (isto é, ao definirem espaço regular já exigem que o espaço seja T_1).

Proposição 6.3.9. *(S,σ) é regular se, e somente se, para todo $p \in S$ e todo $U \in \sigma$, com $p \in U$, existe $V \in \sigma$ tal que $p \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Sejam $p \in S$ e $U \in \sigma$, com $p \in U$. O fechado $F = U^c = S - U$ não contém p e como (S,σ) é regular, existem abertos G_1 e G_2 tais que $p \in G_1$ e $F \subseteq G_2$ com $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Também, $\overline{G_1} \cap G_2 = \emptyset$, pois se $x \in \overline{G_1} \cap G_2$, então todo aberto que contém x tem interseção não vazia com G_1, de modo que $G_2 \cap G_1 \neq \emptyset$, absurdo. Assim, basta tomar $V = G_1$, uma vez que

$$p \in G_1 \subseteq \overline{G_1} \subseteq G_2^c \subseteq F^c = U.$$

$(\Leftarrow)$ Sejam p um ponto de S e F um fechado de S tais que $p \notin F$. Então $p \in U = F^c \in \sigma$. Assim, por hipótese, existe $V \in \sigma$ tal que $p \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$, logo basta considerar $G_1 = V$ e $G_2 = \overline{V}^{\,c}$, pois $p \in V = G_1$, $F = U^c \subseteq \overline{V}^{\,c} = G_2$ e $G_1 \cap G_2 = V \cap \overline{V}^{\,c} = \emptyset$. Portanto (S,σ) é regular. □

Proposição 6.3.10. *Todo espaço topológico compacto e T_2 (Hausdorff) é regular e portanto T_3 espaço.*

Demonstração. Exercício 6.3.1 - 8. □

Definição 6.3.11. *Dizemos que um espaço topológico (S,σ) é **completamente regular** se, dados $p \in S$ e $F \subseteq S - \{p\}$ fechado, existe $f : S \to [0,1]$ contínua com $f(p) = 0$ e $f(F) = \{1\}$.*

Exemplo 6.3.12. *Os espaços métricos são completamente regulares. Dado (M,d) um espaço métrico, se F é um fechado em M e $p \notin F$, então $d(p,F) > 0$. Tome $f : M \to [0,1]$; $f(x) = 1 - [d(x,F)/(d(x,p) + d(x,F))]$.*

Observação 6.3.13. *i) Um espaço (S,σ) é completamente regular se, e somente se, dados $p \in S$ e $F \subseteq S - \{p\}$ fechado, existe $g : S \to [0,1]$ contínua com $g(p) = 1$ e $g(F) = \{0\}$. Basta considerar o homeomorfismo $\psi : [0,1] \to [0,1]$, tal que $\psi(t) = 1 - t$.*

ii) Na definição de completamente regular apresentada em Munkres [20] (Cap. 4, §33, Def., p. 211) exige-se também que o espaço seja T_1.

Definição 6.3.14. *Dizemos que (S,σ) é um* ***espaço de Tychonoff*** *ou* ***$T_{\frac{7}{2}}$ espaço*** *se (S,σ) é T_1 e completamente regular.*

Observação 6.3.15. *Todo espaço completamente regular é regular (Exercício 7 abaixo), de modo que todo espaço de Tychonoff (ou $T_{\frac{7}{2}}$) é T_3. Um exemplo de espaço regular que não é completamente regular é apresentado em Munkres [20], Cap. 4, §33, Exerc. 11, p. 214.*

6.3.1 Exercícios

1) Prove que todo espaço T_0 e regular é T_3 espaço. (*Sugestão*: mostre que é T_2 espaço e assim T_1. Dados $x \neq y$, como o espaço é T_0, existe, sem perda de generalidade, um aberto G tal que $x \in G$ e $y \notin G$. Use a regularidade para o fechado $F = G^c$ que não contém x.)

2) Prove que todo espaço métrico M é regular e T_3. (*Sugestão*: use que se F é fechado em M e p não pertence a F então $d(p,F) > 0$ e tome $\varepsilon = d(p,F)/3$, $U = B(p,\varepsilon)$ e $V = \cup_{x \in F} B(x,\varepsilon)$.)

3) Mostre que todo subespaço Y de um espaço S regular (completamente regular) é regular (completamente regular). (*Sugestão*: Tome $p \in Y$ e F um fechado em Y com $p \notin F$. Usar que dado $F \subseteq Y$; $\overline{F}^Y = \overline{F} \cap Y$, sendo $\overline{F}^Y$ o fecho de F em Y e $\overline{F}$ o fecho de F em S, logo se $p \in Y$ e $p \notin \overline{F}^Y$, então $p \notin \overline{F}$. (Munkres [20], Cap. 4, §31, Teor. 31.2, p. 196 e, para completamente regular, Cap. 4, §33, Teor. 33.2, p. 211.)

4) Se $(S_\lambda, \sigma_\lambda)$, $\lambda \in L$, são espaços regulares, mostre que $S = \prod_{\lambda \in L} S_\lambda$, com a topologia produto σ_{prod} é regular. (*Sugestão*: usar a Proposição 6.3.9, o fato que dado $p \in U$ com $U \in \sigma_{prod}$, existe um aberto básico B, com $p \in B \subseteq U$, e ainda que, dados $A_\lambda \subseteq S_\lambda$, tem-se $\overline{\prod_{\lambda \in L} A_\lambda} = \prod_{\lambda \in L} \overline{A_\lambda}$.)

5) Se $(S_\lambda, \sigma_\lambda)$, $\lambda \in L$, são espaços completamente regulares, mostre que $S = \prod_{\lambda \in L} S_\lambda$, com a topologia produto σ_{prod} é completamente regular. (*Sugestão*: usar a ideia apresentada em Munkres [20], Cap. 4, §33, Teor. 33.2, p. 211. Dados $y = (y_\lambda)_\lambda \in S$ e F fechado de S com $y \notin F$, existe um aberto básico $U = p_{\alpha_1}^{-1}(G_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(G_{\alpha_n})$ tal que $y \in U \subseteq F^c$. Por hipótese, para cada $i = 1, \ldots, n$, existe $f_i : S_{\alpha_i} \to \{0,1\}$ contínua tal que $f_i(y_{\alpha_i}) = 1$ e $f_i(G_{\alpha_i}^c) = \{0\}$. Tome $f : S = \prod_{\lambda \in L} S_\lambda \to \{0,1\}$; para cada $x = (x_\lambda)_\lambda$, $f(x) = f_1(p_{\alpha_1}(x)).f_2(p_{\alpha_2}(x)).\ldots.f_n(p_{\alpha_n}(x)) = f_1(x_{\alpha_1}).f_2(x_{\alpha_2}).\ldots.f_n(x_{\alpha_n})$. Então $f(y) = 1$ e $f(U^c) = \{0\}$ (já que $x \notin U \;\Leftrightarrow\; x_{\alpha_j} \notin G_{\alpha_j}$ para algum j), e assim $f(F) = 0$ visto que $F \subseteq U^c$.)

6) Mostre que ser T_i, $i = 3$ ou $\frac{7}{2}$, é propriedade topológica, hereditária e transferível para o produto.

7) Mostre que se (S,σ) é completamente regular, então (S,σ) é regular. (Lipschutz [17], Cap.10, Prop. 10.10, p. 189 e 196.)

8) Mostre que todo espaço topológico compacto e de Hausdorff é regular. Isto é, prove a Proposição 6.3.10 acima. (*Sugestão*: usar o fato que todo fechado num compacto é compacto e o Exercício 4.1.1 - 4.)

9) Mostre que todo espaço (S,σ) de Hausdorff e localmente compacto é regular e T_3 espaço. (*Sugestão*: use a Proposição 6.3.9 e o Exercício 4.6 - 1.)

6.4 Separação de Conjuntos Fechados

Definição 6.4.1. *Dizemos que um espaço (S,σ) é **normal** se para todos F_1 e F_2 fechados de S, disjuntos, existem G_1, $G_2 \in \sigma$ com $F_i \subseteq G_i$, $i = 1,2$ e $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.*

Notemos que ser normal não implica em ser T_1 espaço. O espaço $(S = \{1,2,3\},\ \sigma = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\})$, do Exemplo 6.3.2, é normal, mas, com vimos, não é T_1 espaço.

Definição 6.4.2. *Um espaço (S,σ) **satisfaz o axioma T_4** ou é **T_4 espaço** se (S,σ) é T_1 e normal.*

Exemplo 6.4.3. *Todo espaço metrizável é normal e T_4-espaço. De fato, sejam F_1 e F_2 fechados em um espaço métrico (M,d), tais que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Vamos usar o seguinte fato:*

Se F é fechado em M e p não pertence a F então $d(p,F) > 0$.

Assim, dados $a \in F_1$ e $b \in F_2$, como $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, $d(a,F_2) = \delta_a > 0$ e $d(b,F_1) = \eta_b > 0$. Tome $G_1 = \cup_{a \in F_1} B(a, \delta_a/3)$ e $G_2 = \cup_{b \in F_2} B(b, \eta_b/3)$. Vejamos que $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Suponhamos $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$. Então existe $p \in G_1 \cap G_2$. Logo $p \in B(a, \delta_a/3)$, para algum $a \in F_1$ e $p \in B(b, \eta_b/3)$, para algum $b \in F_2$. Temos que $\varepsilon := d(a,b) > 0$, pois $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, e $d(a,F_2) = \delta_a \leq \varepsilon = d(a,b)$. Também, $d(b,F_1) = \eta_b \leq \varepsilon$. Daí, $\varepsilon = d(a,b) \leq d(a,p) + d(p,b) < \delta_a/3 + \eta_b/3 \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = 2\varepsilon/3$, o que é uma contradição. Assim, G_1 e G_2 são abertos com $F_1 \subseteq G_1$, $F_2 \subseteq G_2$ e $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, e M é normal. Como todo espaço métrico é T_2 (e portanto T_1), conclui-se que M é T_4 espaço.

Proposição 6.4.4. *Um espaço topológico (S,σ) é normal se, e somente se, dados F fechado e U aberto com $F \subseteq U$, existe $V \in \sigma$ tal que $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Demonstração. Segue a mesma ideia da demonstração da Proposição 6.3.9 para espaço regular.
$(\Rightarrow)$ Dados $F \subseteq U$, com F fechado e U aberto, seja $F_0 = U^c$. Assim obtemos um par de fechados F, F_0 com $F \cap F_0 = \emptyset$. Como S é normal existem G_1, G_2 abertos com $F \subseteq G_1$, $F_0 \subseteq G_2$ e $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$. Então, para $V = G_1$, tem-se $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$, pois claramente $F \subseteq G_1 = V \subseteq \overline{V}$, e como $G_1 \subseteq G_2^c$, com G_2^c fechado, obtemos $\overline{G_1} \subseteq G_2^c$. Agora $F_0 \subseteq G_2$ implica $G_2^c \subseteq {F_0}^c = U$, donde segue que $\overline{V} = \overline{G_1} \subseteq U$.

($\Leftarrow$) Sejam F_1 e F_2 fechados disjuntos em S. Considere $U = F_2{}^c$, temos U aberto, $F_1 \subseteq U$. Por hipótese, existe V aberto com $F_1 \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Considere $G_1 = V$ e $G_2 = \overline{V}^{\,c}$. Então G_1 e G_2 são abertos, $F_1 \subseteq G_1$, e como $\overline{V} \subseteq U = F_2{}^c$, temos $F_2 \subseteq \overline{V}^{\,c} = G_2$. Finalmente, de $V \subseteq \overline{V}$, segue que $G_2 = \overline{V}^c$ é disjunto de $G_1 = V$, o que conclui a prova. □

Proposição 6.4.5. *Todo espaço topológico compacto e Hausdorff é normal e portanto T_4 espaço.*

Demonstração. Exercício 6.4.1 - 3. □

Observação 6.4.6. *$i)$ $T_4 \Rightarrow T_3$, pois se (S,σ) é um T_4 espaço, dados $x \in S$ e um fechado F que não contém x, por S ser T_1, $\{x\}$ é um fechado disjunto de F e assim existem G_1 e G_2 abertos disjuntos tais que $\{x\} \subseteq G_1$ e $F \subseteq G_2$. Logo, todo espaço T_4 é normal e T_2, já que T_3 implica em T_2.*

$ii)$ Um espaço pode ser normal e não ser regular (por exemplo, o espaço de Sierpinski $(\{0,1\}, \sigma = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\})$ é normal, porque não possui dois fechados não vazios disjuntos, e não é regular, pois não existem abertos separando $p = 0$ e o fechado $\{1\}$). Note que o espaço não é T_4, pois não é T_1.

$iii)$ Um espaço pode ser regular e não ser normal, como apresentado no próximo exemplo.

$iv)$ Similarmente ao observado no caso de espaço regular, Munkres [20], ao definir espaço normal já exige que o espaço seja T_1, de forma que a definição de T_4 espaço apresentada aqui é equivalente a de normal apresentada por Munkres.

$v)$ Normalidade (bem como ser T_4 espaço) não é propriedade hereditária nem transferível para o produto. Exemplo que ilustram isso não são fáceis. (Ver Munkres [20], Cap. 4, §32, Exemplo 1, p. 203.)

Exemplo 6.4.7. *Seja (S,σ) o espaço dado no Exemplo 6.3.5 (de Moore). Vimos que (S,σ) é regular. Mostremos que (S,σ) não é normal. De fato, os conjuntos $F_1 = \{(a,0) : a \in \mathbb{Q}\}$ e $F_2 = \{(a,0) : a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\}$ são fechados, disjuntos e não existem vizinhanças abertas disjuntas G_1 e G_2 contendo F_1 e F_2, respectivamente, pois não se pode usar para cobrir F_1 (F_2) vizinhanças do tipo $V_\varepsilon(p,q)$, porque elas não separam F_1 e F_2. Assim, tem-se que cobrir F_1 (F_2) com vizinhanças $V_\varepsilon(a,0)$ com a racional (irracional, respectivamente). Mas, um disco tangente ao eixo Ox em um ponto irracional b deve intersectar infinitos discos tangentes em pontos racionais.*

Em espaços e_2 tem-se a equivalência entre espaços T_3 e T_4, isto é consequência do resultado seguinte e da observação anterior, item i.

Proposição 6.4.8. *(S,σ) um espaço topológico. Se S é T_3 espaço (ou seja, T_2 espaço e regular) e e_2, então S é normal (e portanto T_4).*

Demonstração. Seja (S,σ) um espaço regular com base $\mathfrak{B}$ enumerável (e_2 espaço). Sejam F_1 e F_2 subconjuntos de S fechados e disjuntos.

• Vejamos inicialmente que existe uma família $\{G_i,\ i \in \mathbb{N}^*\} \subseteq \mathfrak{B}$ que cobre F_1 e é tal que $\overline{G_i} \cap F_2 = \emptyset$, para todo $i \in \mathbb{N}^*$. De fato, da regularidade de S, para cada $x \in F_1$, existem abertos U_x e $W_x^{F_2}$ tais que $x \in U_x$ (i. é, U_x é vizinhança aberta de x), $F_2 \subseteq W_x^{F_2}$ e $U_x \cap W_x^{F_2} = \emptyset$ e, portanto, $U_x \cap F_2 = \emptyset$. Usando a Proposição 6.3.9, para $x \in U_x$ existe $V_x \in \sigma$ tal que $x \in V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq U_x$. Como $\mathfrak{B}$ é base, existe $G_x \in \mathfrak{B}$, tal que $x \in G_x \subseteq V_x$ e $\overline{G_x} \cap F_2 = \emptyset$ (pois $\overline{G_x} \subseteq \overline{V_x} \subseteq U_x \subseteq F_2^c$). Temos que $F_1 \subseteq \bigcup_{x \in F_1} G_x$ e $\mathfrak{F}_{F_1} := \{G_x,\ x \in F_1\}$ é um conjunto enumerável, visto que $\mathfrak{F}_{F_1} \subseteq \mathfrak{B}$ que é enumerável. Reindexando, temos $\mathfrak{F}_{F_1} = \{G_i,\ i \in \mathbb{N}^*\} \subseteq \mathfrak{B}$, $F_1 \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} G_i$, e $\overline{G_i} \cap B = \emptyset$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$.

• Analogamente, trabalhando com os elementos $y \in F_2$, o fechado F_1 e usando a regularidade de S, obtemos uma família $\mathfrak{F}_{F_2} = \{H_j, j \in \mathbb{N}^*\}$ de abertos básicos, tal que $F_2 \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} H_j$ e $\overline{H_j} \cap F_1 = \emptyset$, para todo j.

• Considere os conjuntos $G = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} G_i$ e $H = \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} H_j$. Temos que G e H são abertos, $F_1 \subseteq G$, $F_2 \subseteq H$, mas G e H *não* são necessariamente disjuntos. Precisamos obter conjuntos abertos disjuntos $\widetilde{G}$ e $\widetilde{H}$ (contendo F_1 e F_2, respectivamente). Para isto procede-se do seguinte modo: dado n, defina

$$\widetilde{G_n} := G_n - \bigcup_{k=1,\dots,n} \overline{H_k} = G_n - (\overline{H_1} \cup \dots \cup \overline{H_n}),$$

$$\widetilde{H_n} := H_n - \bigcup_{k=1,\dots,n} \overline{G_k} = H_n - (\overline{G_1} \cup \dots \cup \overline{G_n}),$$

e tome

$$\widetilde{G} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \widetilde{G_n} \quad \text{e} \quad \widetilde{H} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \widetilde{H_n}.$$

• $\widetilde{G}$ e $\widetilde{H}$ são abertos, e $F_1 \subseteq \widetilde{G}$, $F_2 \subseteq \widetilde{H}$ ($F_1 \subseteq \widetilde{G}$, pois $x \in F_1$ implica que existe n tal que $x \in G_n$ e, como $\overline{H_j} \cap F_1 = \emptyset$, segue que $x \notin \overline{H_j}$, $\forall\ j \in \mathbb{N}^*$, logo $x \in \widetilde{G_n} \subseteq \widetilde{G}$. Similarmente, tem-se $F_2 \subseteq \widetilde{H}$).

• Ainda, $\widetilde{G}$ e $\widetilde{H}$ são disjuntos, pois se $z \in \widetilde{G} \cap \widetilde{H}$, então existem n, $m \in \mathbb{N}^*$ tais que $z \in \widetilde{G_n}$ e $z \in \widetilde{H_m}$. Suponhamos $n \leq m$. Segue da definição de $\widetilde{G_n}$ que $z \in G_n$ e, visto que $n \leq m$, segue da definição de $\widetilde{H_m}$ que $z \notin \overline{G_n}$ (pois $z \notin \overline{G_1} \cup \dots \cup \overline{G_n} \cup \dots \cup \overline{G_m}$), o que nos dá uma contradição. O caso $n \geq m$ é similar.

Assim, $\widetilde{G}$ e $\widetilde{H}$ são abertos disjuntos, contendo F_1 e F_2, respectivamente, e portanto S é normal. $\square$

6.4.1 Exercícios

1) Prove que subespaço fechado de um espaço normal é normal.

2) Mostre que normalidade é propriedade topológica.

3) Mostre que todo espaço compacto e de Hausdorf é normal e T_4 espaço, ou seja, prove a Proposição 6.4.5. (*Sugestão*: usar o fato que todo fechado num compacto é compacto e o Exercício 4.1.1 - 4.)

4) Seja (S, σ) um espaço topológico. Diz - se que um uma família $\mathcal{U}$ de aplicações de S em $\mathbb{R}$

separa pontos se para qualquer par de pontos distintos a,b em S existe uma aplicação $f \in \mathcal{U}$ tal que $f(a) \neq f(b)$. Se (S,σ) é $T_{\frac{7}{2}}$ (completamente regular e T_1) mostre que o conjunto $\mathcal{C}(S,\mathbb{R})$ de todas as aplicações continuas de S em $\mathbb{R}$ *separa pontos*. (Lipschultz [17], Cap. 10, Teor. 10.11, p. 189.)

5) Prove que o fecho de um conjunto compacto K num espaço regular (S,σ) é compacto. (*Sugestão*: suponha $\overline{K} \subseteq \bigcup_{\lambda\in J} U_\lambda$, $U_\lambda \in \sigma$. Para cada $x \in \overline{K}$, $x \in U_\lambda$, para algum λ e pela regularidade existe $V_\lambda^x \in \sigma$; $x \in V_\lambda^x \subseteq \overline{V_\lambda^x} \subseteq U_\lambda$. Então a cobertura $\{V_\lambda^x,\ x \in K,\ \lambda \in J\}$ do compacto K tem uma subcobertura finita, em seguida tome o fecho dessa cobertura.)

6) Prove que, se S é espaço de Lindelöf e regular então S é normal. (*Sugestão*: sejam $F_1, F_2 \subseteq S$ fechados e disjuntos. Por um raciocínio similar ao feito no início prova da Proposição 6.4.8, usando a regularidade de S é possível obter uma cobertura aberta de $F_1 \subseteq \bigcup_{x\in F_1} G_x$, com $G_x \in \sigma$, tal que $x \in G_x$ e $\overline{G_x} \cap F_2 = \emptyset$. Como S é de Lindelof e F_1 é fechado em S, F_1 é de Lindelof e assim F_1 tem uma cobertura enumerável $F_1 \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} G_i$, em que $G_i \in \sigma$ e $\overline{G_i} \cap F_2 = \emptyset$, para todo i. Analogamente, obtém-se que $F_2 \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} H_j$, com $H_j \in \sigma$ e $\overline{H_j} \cap F_1 = \emptyset$, para todo j. Agora, seguindo o mesmo raciocínio feito no final da prova da Proposição 6.4.8 obtém $\widetilde{G}$ e $\widetilde{H}$ abertos disjuntos, contendo de F_1 e F_2, respectivamente.)

7) Um espaço (S,σ) é ***completamente normal*** se quaisquer dois *conjuntos separados* em S têm vizinhanças disjuntas. Lembremos que (de acordo com a definição apresentada no Exercício 5.1.1- 6) dois subconjuntos não vazios A e B em um espaço topológico (S,σ) são *conjuntos separados* em S se $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$. Mostre que:

   a) Um espaço S é completamente normal se, e somente se todo subespaço Y de S é normal. Isto mostra que a definição apresentada em Munkres [20] (Cap. 4, §32, Exerc.6, p. 205) é equivalente à dada aqui. (Sugestão: ($\Leftarrow$) dados dois subconjuntos separados A, B de S, considere o subespaço $Y = S - (\overline{A} \cap \overline{B})$, use que Y é normal, observe que Y é aberto e que $A, B \subseteq Y$).

   b) Todo espaço métrico é completamente normal.

8) Dê um exemplo de um espaço normal que não é completamente normal. (*Sugestão*: use o item a, do exercício anterior, e o fato que normalidade não é propriedade hereditária - Observação 6.4.6 - *v*).

6.5 O Teorema de Metrização de Urysohn

Nesta seção demonstraremos uma condição suficiente para a metrizabilidade de um espaço topológico: o *Teorema da Metrização de Urysohn*. Uma condição necessária e suficiente é dada pelo *Teorema de Nagata-Smirnov* que será brevemente abordado na próxima seção.

Uma ferramenta extremamente importante para a demonstração do Teorema da Metrização de Urysohn (e também o Teorema da Extensão de Tietze) é o *Lema de Urysohn*.

Lema 6.5.1 (Lema de Urysohn)**.** *Sejam* (S,σ) *um espaço normal e* A,B *subconjuntos fechados de* S*, disjuntos. Então existe uma função contínua* $f : S \to [0,1]$ *tal que* $f(A) = \{0\}$ *e* $f(B) = \{1\}$.

Demonstração. Seja $D = \{\frac{m}{2^n};\ m,n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < m < 2^n\}$, o conjunto dos números racionais "*diádicos*" do intervalo $]0,1[$. Temos que D é totalmente ordenado e é denso em $[0,1]$ (Exercício 2.2.1 - 8).

Para provar o lema vamos primeiramente obter uma coleção $\{U_t\}_{t\in D}$ de abertos de S tais que

$$t_1 < t_2 \ \Rightarrow\ \overline{U}_{t_1} \subseteq U_{t_2},\ \forall\, t_1 < t_2\ \in D.$$

A função será então definida a partir desses abertos. Seja $G = B^c$. Como B é fechado, $G \in \sigma$, e $A \subseteq G$, pois $A \cap B = \emptyset$. Sendo S normal, pela Proposição 6.4.4 (para o fechado A e o aberto G), existe $U_{\frac{1}{2}} \in \sigma$ de modo que

$$A \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subseteq B^c.$$

Usando novamente a Proposição 6.4.4, agora para $A \subseteq U_{\frac{1}{2}}$ e $\overline{U_{\frac{1}{2}}} \subseteq B^c$, segue que existem abertos $U_{\frac{1}{4}}$ e $U_{\frac{3}{4}}$ tais que

$$A \subseteq U_{\frac{1}{4}} \subseteq \overline{U_{\frac{1}{4}}} \subseteq U_{\frac{1}{2}} \ \subseteq\ \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subseteq U_{\frac{3}{4}} \subseteq \overline{U_{\frac{3}{4}}} \subseteq B^c.$$

Continuando com esse processo, para todo racional da forma $t = \frac{m}{2^n} \in D$, $n = 1,2,3,\ldots$, e $m = 1,2,\ldots,2^n-1$, tem-se um aberto U_t, e esses abertos são tais que, se $t_1 < t_2$ então

$$A \subseteq U_{t_1} \subseteq \overline{U_{t_1}} \subseteq U_{t_2} \subseteq \overline{U_{t_2}} \subseteq B^c.$$

Definimos $f : S \to [0,1]$ da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{t \in D;\ x \in U_t\}, & \text{se } x \in \bigcup_{t\in D} U_t, \\ 1, & \text{se } x \notin \bigcup_{t\in D} U_t, \text{ i. é, } x \in \bigcap_{t\in D} {U_t}^c. \end{cases}$$

Claramente $f(S) \subseteq [0,1]$, $f(A) = \{0\}$, pois $x \in A$ implica $x \in U_t$, para todo $t \in D$, e $inf D = 0$, e $f(B) = \{1\}$, visto que $B \subseteq {U_t}^c, \forall t \in D$.

Resta provar que f é contínua. Como os intervalos da forma $[0,b[$ e $]a,1]$, $0 < a,\ b < 1$, constituem uma sub-base para a topologia usual de $[0,1]$, é suficiente mostrar que $f^{-1}([0,b[)$ e $f^{-1}(]a,1])$ são abertos de S. Mas, para $0 < a,\ b < 1$, tem-se

$$(i)\ f^{-1}(]a,1]) = \bigcup_{t>a,\ t\in D} \overline{U_t}^{\,c},$$

$$(ii)\ f^{-1}([0,b[) = \bigcup_{t<b,\ t\in D} U_t,$$

que são abertos. Vejamos a justificativa de (i).

Seja $x \in f^{-1}(]a,1])$, então $f(x) \in]a,1]$. Como D é denso em $[0,1]$, existem $t_1, t_2 \in D$, tais que $a < t_1 < t_2 < f(x)$. Daí, $x \notin U_{t_2}$, pois $[x \in U_{t_2} \Rightarrow f(x) = \inf\{t \in D;\ x \in U_t\} \ \leq\ t_2]$. Temos também que $x \notin \overline{U_{t_1}}$, visto que $t_1 < t_2 \Rightarrow \overline{U_{t_1}} \subseteq U_{t_2}$. Logo $x \in \overline{U_{t_1}}^{\,c}$ e assim $x \in \bigcup_{t>a} \overline{U}_t^{\,c}$, pois $t_1 > a$. Portanto $f^{-1}(]a,1]) \subseteq \bigcup_{t>a,\ t\in D} \overline{U}_t^{\,c}$.

Para a inclusão contrária, considere $z \in \bigcup_{t>a,\ t\in D} \overline{U}_t^{\,c}$. Então existe $t_z \in D$, $t_z > a$, tal que $z \in \overline{U}_{t_z}^{\,c}$. Consequentemente, $z \notin U_t$, $\forall t \leq t_z$, porque $U_t \subseteq \overline{U_{t_z}}$ (assim, se existir $t \in D$ tal que $z \in U_t$, devemos ter $t > t_z$). Se $f(z) = 1$, então claramente $z \in f^{-1}(]a,1])$. Caso contrário, $f(z) = \inf\{t \in D;\ z \in U_t\} \ \geq\ t_z >\ a$, de modo que $f(z) \in]a,1]$ e $z \in f^{-1}(]a,1])$.

A verificação de (ii) é similar, o que conclui a prova do lema. $\square$

Definição 6.5.2. *Uma função $f : S \to [0,1]$, como no lema anterior, é chamada* ***função de Urysohn*** *do par (A,B).*

Proposição 6.5.3. *Um espaço (S,σ) é normal se, e somente se, para todos A e B fechados disjuntos de S, existe $f : S \to [a,b]$ contínua tal que $f(A) = \{a\}$ e $f(B) = \{b\}$.*

Demonstração. Exercício 6.5.1- 2. $\square$

Recordamos a seguir alguns conceitos e resultados utilizados na prova do próximo teorema (o Teorema da Extensão de Tietze).

Definição 6.5.4. *Sejam X um conjunto não vazio, Y um espaço topológico, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ uma sequência de aplicações $f_n : X \to Y$, e $f : X \to Y$ uma aplicação.*
Dizemos que a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ***converge simplesmente*** *ou* ***pontualmente*** *para f se, para cada $x \in X$, a sequência, de pontos de Y, $(f_n(x))_n$ converge para $f(x)$, em Y. Em particular, quando (Y,d) é um espaço métrico, a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplesmente para f se, para todo $\varepsilon > 0$, e cada $x \in X$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.*
Se (Y,d) é um espaço métrico, dizemos que a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de aplicações de X em Y ***converge uniformemente*** *para $f : X \to Y$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n > n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \ < \varepsilon,\ \forall\, x \in X.$$

Neste caso denotaremos $f_n \overset{u}{\to} f$.

Observação 6.5.5. *Se $f_n \overset{u}{\to} f$, então $f_n \to f$ simplesmente, mas a recíproca não é verdadeira. Por exemplo, a sequência de funções $(f_n)_n$, com $f_n : [0,1] \to [0,1]$; $x \mapsto x^n$, converge simplesmente para a função $f : [0,1] \to [0,1]$ definida por $f(x) = 0$, se $0 \leq x < 1$, e $f(1) = 1$, mas não converge uniformemente para f. (Verifique!).*

Proposição 6.5.6. *Sejam X um espaço topológico, Y um espaço métrico, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ uma sequência de aplicações de X em Y e $f : X \to Y$ uma aplicação. Se f_n é contínua para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e $f_n \overset{u}{\to} f$, então f é contínua.*

Demonstração. Seja $x_0 \in X$. Dado $\varepsilon > 0$, como $f_n \xrightarrow{u} f$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $n > n_0$ implica $d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$, para todo $x \in X$. Seja m um inteiro (fixado), com $m > n_0$. Como f_m é contínua em x_0, existe um aberto G de X, com $x_0 \in G$ tal que para todo $x \in G$, tem-se $d(f_m(x), f_m(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Assim, para todo $x \in G$, $f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$, pois

$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_m(x)) + d(f_m(x), f_m(x_0)) + d(f_m(x_0), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Portanto f é contínua, pois é contínua em x_0, para todo $x_0 \in X$. □

Teorema 6.5.7 (Teorema da Extensão de Tietze)**.** *Sejam S um espaço topológico normal, F um subespaço fechado de S e f uma função contínua definida em F com valores em $[a,b]$. Então f tem uma extensão contínua φ definida no espaço S com valores em $[a,b]$ (i. é. ($\varphi|_F = f$).*

Demonstração. Se f é uma aplicação constante, ou seja, $f(x) = c$, para todo x em F, tome φ como a aplicação constante $\varphi(x) = c$, para todo x em S.

Suponhamos f não constante e que $[a,b]$ é o menor (com relação a inclusão) intervalo fechado que contém a imagem de f. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $a = -1$ e $b = 1$.

A idéia da prova é definir uma sequência de funções contínuas $s_n : S \to [-1,1]$ que converge uniformemente para uma função $\varphi : S \to [-1,1]$ que restrita a F coincide com f.

Para tanto vamos inicialmente definir uma sequência de funções contínuas (f_i) definidas em F e uma sequência de funções contínuas (g_i) definidas em S ($i \in \mathbb{N}^*$), da seguinte forma:

• Tome $f_0 = f : F \to [-1,1]$ e considere

$$A_0 = \left\{x \in F : \ f_0(x) \leq -\frac{1}{3}\right\} = f^{-1}([-1, -\frac{1}{3}]); \quad B_0 = \left\{x \in F : \ f_0(x) \geq \frac{1}{3}\right\} = f^{-1}([\frac{1}{3}, 1]).$$

Temos $A_0 \cap B_0 = \emptyset$ e A_0, B_0 são fechados não vazios em S, pois são fechados em F (visto que f é contínua) e F é fechado de S. Pelo Lema de Urysohn (e Proposição 6.5.3) existe

$$g_0 : S \to \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \subseteq [-1,1], \text{ contínua, tal que } g_0(A_0) = \left\{-\frac{1}{3}\right\} \text{ e } g_0(B_0) = \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

(note que $|g_0(x)| \leq \frac{1}{3}$, para todo x em S).

• Defina agora $f_1 = f_0 - g_0|_F : F \to [-1,1]$. Então f_1 é contínua e $|f_1(x)| \leq \frac{2}{3}$, para ver isso basta analisar cada caso: $x \in A_0$, $x \in B_0$ e $x \in F - (A_0 \cup B_0)$ (exercício). Sejam

$$A_1 = \left\{x \in F : \ f_1(x) \leq \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{2}{3}\right\} = f_1^{-1}([-1, -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}]); \ B_1 = \left\{x : f_1(x) \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\right\} = f_1^{-1}([\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}, 1]).$$

Assim obtemos, como antes, A_1 e B_1, subconjuntos fechados de S disjuntos e não vazios. Pelo Lema de Urysohn existe

$$g_1 : S \to \left[-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right] \subseteq [-1,1] \text{ contínua, com } g_1(A_1) = \left\{-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right\} \text{ e } g_1(B_1) = \left\{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right\},$$

e temos $|g_1(x)| \leq \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$, para todo $x \in S$.

• Defina então $f_2 : F \to [-1,1]$ por $f_2 = f_1 - g_1 = f_0 - (g_0 + g_1)|_F$. Temos que f_2 é contínua e $|f_2(x)| < \left(\frac{2}{3}\right)^2$, para todo $x \in F$.

• Continuando com este processo, obtemos funções contínuas $f_0, f_1, f_2, \ldots$, definidas em F tais que $|f_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$, para todo $x \in F$, e $g_0, g_1, g_2, \ldots$ definidas em S tais que $|g_n(x)| \leq \left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$, para todo $x \in S$, com a propriedade de que $f_n = f_0 - (g_0 + g_1 + g_2 + \cdots + g_{n-1})$ (considerando as restrições de g_i em F).

Seja $s_n = (\sum_{i=0}^{n-1} g_i) : S \to [-1,1]$, tal que $s_n(x) := \sum_{i=0}^{n-1} g_i(x)$. Do fato que $|g_n(x)| \leq \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$, segue que a série infinita de funções $\sum_{i=0}^{\infty} g_i(x)$ converge (uniformemente), pois seus termos são limitados pelos termos da série numérica/geométrica convergente $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$ que converge para $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) = 1$ (Critério de Weierstrass).

Tome $\varphi(x) := lim\, s_n(x)$. Temos que $\varphi(x) = lim\, s_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i(x)$ define uma função contínua (visto que s_n converge uniformemente para φ), e $|\varphi(x)| \leq 1$.

Vejamos que $\varphi = f$ em F, isto é $\varphi_{|F} = f$, e assim φ é extensão contínua de f ao espaço S. Da construção (e do fato que $f_0 = f$) temos que, para todo $x \in F$,

$$|f(x) - s_n(x)| = |f(x) - (g_0 + g_1 + g_2 + \cdots + g_{n-1})(x)| = |f_n(x)| \leq (\frac{2}{3})^n.$$

Assim, para cada $x \in F$ (fixado), $f(x) = \lim s_n(x) = \varphi(x)$. □

Corolário 6.5.8. *Dados S um espaço topológico normal e F um subconjunto fechado de S, se $f : F \to \mathbb{R}$ é uma aplicação contínua então existe $\varphi : S \to \mathbb{R}$ contínua estendendo f.*

Demonstração. Como $\mathbb{R}$ é homeomorfo a $]-1,1[$ podemos considerar $f : F \to]-1,1[\subseteq [-1,1]$. Pelo Teorema da Extensão de Tietze, existe $g : S \to [-1,1]$ extensão de f (e, a princípio, pode existir $x \in S$, com $g(x) = 1$ ou $g(x) = -1$). Queremos, no entanto, obter uma extensão $\varphi : S \to]-1,1[$ de f. Seja $D = g^{-1}(\{-1, 1\}) \subseteq S$. Se $D = \emptyset$, tomamos $\varphi = g$.

Suponhamos $D \neq \emptyset$. Como g é contínua, D é fechado em S. Ainda, $g(F) = f(F) \subseteq]-1,1[$ e $F \cap D = \emptyset$ (com F e D fechados). Pelo Lema de Uryshon, existe $\psi : S \to [0,1]$ contínua tal que $\psi(D) = 0$ e $\psi(F) = 1$. Considere a função $\varphi(x) := \psi(x).g(x)$, para todo $x \in S$. Então, para $x \in D$, $\varphi(x) = 0$ e, para $x \notin D$, como $|\psi(x)| \leq 1$ e $|g(x)| < 1$, segue que $|\varphi(x)| = |\psi(x)|\,.|g(x)| \leq 1\,.|g(x)| < 1$, de modo que $\varphi : S \to]-1,1[$. A aplicação φ é contínua, pois é o produto de duas funções (em $\mathbb{R}$) contínuas e φ é uma extensão de f, visto que para $x \in F$, $\varphi(x) = \psi(x).g(x) = 1.g(x) = f(x)$. □

Observação 6.5.9. *O Teorema da Extensão de Tietze não é verdadeiro se a hipótese de fechado for suprimida. Por exemplo, a função $f :]0,1[\to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = sen\frac{1}{x}$ não admite extensão* *contínua para* $[0,1]$.

Para a prova do principal resultado desse capítulo, relativo a metrização de espaços topológicos, necessitamos introduzir alguns conceitos.

Definição 6.5.10. (Espaço de Hilbert das sequências de quadrado somável)*: Considere*

$$\mathbf{H} := \{(a_1, a_2, a_3, ...);\ a_n \in \mathbb{R}\ \ e\ \sum_n (a_n)^2 < \infty\}.$$

Sejam $a = (a_n)$ *e* $b = (b_n)$ *em* $\mathbf{H}$*. A função* $d : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \to \mathbb{R}$ *definida por* $d(a,b) := \sqrt{\sum_n | a_n - b_n |^2}$ *é uma métrica sobre* $\mathbf{H}$ (*exercício*) *denominada* ***métrica*** $\boldsymbol{\ell_2}$ *e o espaço* $\mathbf{H}$ *munido dessa métrica é denominado* ***espaço de Hilbert*** $\boldsymbol{\ell_2}$*, ou* ℓ_2 *- espaço. O conjunto*

$$\boldsymbol{I} := \{(a_1, a_2, a_3, ...);\ a_n \in [0, 1/n],\ \forall n \in \mathbb{N}^*\}$$

é um subespaço de $\mathbf{H}$ (*exercício*)*. Tal espaço* (*métrico*) *é denominado* ***Cubo de Hilbert****.* (*Note que* $\mathbf{H}$ *é um espaço vetorial por considerar* $(a_n) + (b_n) := (a_n + b_n)$ *e* $\lambda(a_n) := (\lambda a_n)$*.*)

Observação 6.5.11. *Em geral, chama-se* ***espaço de Hilbert*** *a todo espaço vetorial E, munido de um produto interno* $< x, y >$ *e "completo"* (*vide capítulo seguinte*) *relativamente a métrica que provém da norma* $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$*. Pode-se mostrar* (*Lima [14], Cap. 6, Exemplo 11, p. 154*)*, que o* ℓ_2 *- espaço* (*vetorial*) $\mathbf{H}$ *é um espaço completo, de modo que* $\mathbf{H}$ *é um espaço de Hilbert.*

Teorema 6.5.12 (Teorema da Imersão ou Metrização de Urysohn)**.** *Seja* (S, σ) *um espaço topológico. Se* S *é* e_2*,* T_2 *e normal, então* S *é metrizável, de fato existe um homeomorfismo* f *de* S *em um subespaço* (*metrizável*) *do* ℓ_2*- espaço* $\mathbf{H}$*, mais especificamente em um subespaço do cubo de Hilbert* $\boldsymbol{I}$*.*

Demonstração. Se S é finito a afirmação é verdadeira, pois todo T_2 espaço finito $S = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ é discreto já que $\{x_k\}$ é um conjunto aberto porque é o complementar de $\{x_1, x_2, ..., x_{k-1}\}$ que é fechado. O mesmo vale para os demais x_i, $i = 1, ..., k-1$, e se S é discreto então S é metrizável (com a métrica d_{01}). Ainda, S é homeomorfo a qualquer subconjunto finito de $\boldsymbol{I}$ com número equivalente de pontos.

Suponhamos S infinito. Como S é e_2, existe $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, G_3, \ldots\}$ base enumerável de abertos para a topologia de S. Dados G_j e $x \in G_j$, como S é regular (pois T_2 e normal implica em regular), existe $G_i \in \mathcal{G}$ tal que $x \in G_i \subseteq \overline{G_i} \subseteq G_j$.

O conjunto dos pares (G_i, G_j) tais que $\overline{G_i} \subseteq G_j$ é enumerável, infinito e pode ser escrito como uma sequência $P_1, P_2, P_3, \ldots$. Notemos que $\overline{G_i} \subseteq G_j$ implica que $\overline{G_i}$ e $S - G_j = (G_j)^c$ são fechados disjuntos. Pelo Lema de Urysohn, para cada par ordenado $P_n = (G_i, G_j)$, existe uma função real contínua $f_n : S \to [0,1]$ tal que $f_n(\overline{G_i}) = \{0\}$ e $f_n(S - G_j) = \{1\}$. Para cada $x \in S$, definimos

$$f(x) = (f_1(x), \frac{f_2(x)}{2}, \frac{f_3(x)}{3}, \ldots, \frac{f_n(x)}{n}, \ldots).$$

Como $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, e $[\frac{f_n(x)}{n}]^2 \leq \frac{1}{n^2}$ (já que $Imf_n \subseteq [0,1]$), segue que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)^2}{n^2}$ converge (uniformemente) e portanto $f(x) \in \mathbf{H}$, para cada $x \in S$. Notemos que $f(x) \in \boldsymbol{I}$ visto que $\frac{f_n(x)}{n} \leq \frac{1}{n}$, e assim temos bem definida uma função $f : S \to \boldsymbol{I} \subseteq \mathbf{H}$.

A função f é *injetora*, pois dados x e x_0 em S, com $x \neq x_0$, como S é Hausdorff existe $G_j \in \mathcal{G}$ tal que $x \in G_j$ e $x_0 \in S - G_j$. Pela regularidade, existe um par $P_n = (G_i, G_j)$, com $x \in G_i \subseteq \overline{G_i} \subseteq G_j$ e (pelo Lema de Urysohn) temos a função $f_n : S \to [0,1]$ tal que $f_n(\overline{G_i}) = \{0\}$ e $f_n(S - G_j) = \{1\}$ (conforme observado anteriormente). Daí $f_n(x) = 0$ e $f_n(x_0) = 1$. Assim $\frac{f_n(x)}{n} \neq \frac{f_n(x_0)}{n}$ e portanto $f(x) \neq f(x_0)$.

Mostremos que f é *contínua*, isto é, dados $x_0 \in S$ e $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança W de x_0 tal que $x \in W$ implica $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$. De fato, como os valores de f_n estão entre $[0,1]$ segue que $\frac{|f_n(x) - f_n(x_0)|}{n} \leq \frac{|f_n(x)|}{n} + \frac{|f_n(x_0)|}{n} \leq \frac{2}{n}$, para todo $n \geq 1$ e $x \in S$. Daí, usando a convergência da série $\sum \frac{1}{n^2}$, existe um inteiro positivo n_0 tal que para todo $x \in S$,

$$\|f(x) - f(x_0)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n(x) - f_n(x_0)|^2}{n^2} = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{|f_n(x) - f_n(x_0)|^2}{n^2} + \sum_{n > n_0} \frac{|f_n(x) - f_n(x_0)|^2}{n^2}$$

$$< \sum_{n=1}^{n_0} \frac{|f_n(x) - f_n(x_0)|^2}{n^2} + \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Pela continuidade das funções $f_n : S \to [0,1]$, para cada $n = 1, 2, \ldots, n_0$, existe uma vizinhança W_n de x_0 tal que

$$x \in W_n \Rightarrow \frac{|f_n(x) - f_n(x_0)|^2}{n} < \frac{\varepsilon^2}{2n_0}.$$

Tomando $W = \bigcap_{n=1}^{n_0} W_n$, tem-se

$$x \in W \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|^2 < n_0 . \frac{\varepsilon^2}{2n_0} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2,$$

donde segue que $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ e portanto f é contínua.

Como $f : S \to \boldsymbol{I}$ é injetora, temos uma *bijeção* $f : S \to f(S) \subseteq \boldsymbol{I}$.

Mostremos que $f^{-1} : f(S) \to S$ é *contínua*. Para tanto é suficiente provar que para cada $y_0 = f(x_0) \in f(S)$ e todo aberto básico G_j contendo $x_0 = f^{-1}(y_0) \in S$, existe $\delta > 0$ tal que $y = f(x) \in B(y_0, \delta)$ ($\Leftrightarrow$ $\|y - y_0\| = \|f(x) - f(x_0)\| < \delta$) implica $f^{-1}(y) = x \in G_j$ isto é, $f^{-1}(B(f(x_0), \delta) \cap f(S)) \subset G_j$. Mas G_j é a segunda coordenada de algum par ordenado $P_{n_0} = (G_i, G_j)$ tal que $x_0 \in G_i \subseteq \overline{G_i} \subseteq G_j$. Escolhendo $\delta < \frac{1}{2n_0}$, obtemos

$$\|y - y_0\| = \|f(x) - f(x_0)\| < \delta \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n(x) - f_n(x_0)|^2}{n^2} = \|f(x) - f(x_0)\|^2 < \delta^2 < \left(\frac{1}{2n_0}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)|^2}{{n_0}^2} < \left(\frac{1}{2n_0}\right)^2 \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{1}{2}.$$

Dado que $x_0 \in G_i$, $f_{n_0}(x_0) = 0$ e então $|f_{n_0}(x)| < \frac{1}{2}$. Visto que $f_{n_0}(G_j^c) = \{1\}$, concluimos que $x \notin G_j^c$, logo $x = f^{-1}(y) \in G_j$, como desejado. Assim $f^{-1} : f(S) \to S$ é contínua.

Portanto temos um homeomorfismo de S num subespaço de $\boldsymbol{I}$ que é um espaço metrizável, de modo que S é metrizável, o que conclui a prova. □

Corolário 6.5.13. *Seja* (S,σ) *um espaço topológico. Se* S *é* e_2, T_2 *e regular, então* S *é metrizável.*

Demonstração. Segue da Proposição 6.4.8 e do teorema anterior. □

Observação 6.5.14. $i)$ *A recíproca do teorema anterior não é verdadeira. Por exemplo, o espaço metrizável* $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ *(via a métrica* d_{01}*) é regular,* T_2*, mas não é* e_2 *espaço.*

$ii)$ *Considerando o item anterior e o fato de que todo espaço métrico é* T_2 *e regular (e também normal), para obter uma condição "necessária e suficiente" de metrizabilidade, dentre as situações apresentadas (na hipótese do teorema/corolário anterior) a que deverá ser alterada/enfraquecida é a de que do espaço seja* e_2 *(i.é, tenha base enumerável).*

6.5.1 Exercícios

1) Demonstre o Lema de Urysohn admitindo o Teorema de Tietze.

2) Mostre que um espaço (S,σ) é normal se, e somente se, para todos A e B fechados disjuntos de S, existe $f : S \to [a,b]$ contínua tal que $f(A) = \{a\}$ e $f(B) = \{b\}$.

3) Se S é T_4 espaço (normal e T_1) mostre que S é completamente regular e portanto $T_{7/2}$.

4) Seja (S,σ) um espaço topológico normal. Mostre que, neste caso, (S,σ) é regular se, e somente se, é completamente regular. (Lipschutz [17], Cap.10, Exerc. 37, p. 198.) Recordemos que a afirmação "completamente regular implica regular" é verdadeira para qualquer espaço topológico - vide Exercício 6.3.1 -7. (*Sugestão*: $(\Rightarrow)$ Dado $p \notin F$, existem abertos disjuntos G_1 e G_2 tais que $p \in G_1$ e $F \subseteq G_2$. Use o Lema de Urysohn para os fechados $\overline{U_2}^c$ e F.)

5) Seja X um espaço compacto e Hausdorff. Prove que X é metrizável se, e somente se, X é e_2 espaço. (*Sugestão*: $(\Rightarrow)$ use que "espaço métrico compacto é separável" e que "métrico separável é e_2". $(\Leftarrow)$ use que "espaço topológico compacto e de Hausdorff é normal" e o Teorema de Metrização de Urysohn.)

6) Sabemos que todo espaço métrico é normal e também que um espaço normal e de Hausdorff com base enumerável é metrizável. Dê um exemplo de um espaço normal que não é metrizável. (*Sugestão*: $S = \{1,2,3,4\}$; $\tau = \{\emptyset, \{1,2\}, \{3,4\}, S\}$.)

7) Verifique que a sequência de funções $f_n : [0,1] \to [0,1]$, $f_n(x) = x^n$ converge simplesmente para $f : [0,1] \to [0,1]$, definida por $f(x) = 0$, se $0 \leq x < 1$, e $f(1) = 1$, mas que a convergência não é uniforme (Observação 6.5.5).

6.6 Paracompacidade e outros teoremas de metrização (noção)

Uma condição necessária e suficiente para metrizabilidade de um espaço topológico é dada pelo *Teorema de Nagata-Smirnov*. Tal teorema foi demonstrado, independentemente, por Nagata em 1950 e Smirnov em 1951 (Nagata, [21]; Smirnov [24], [25]). O objetivo principal desta seção é dar uma idéia (apresentar o enunciado) desse teorema e do *Teorema de Metrização de Smirnov*, que também estabelece uma condição necessária e suficiente para metrizabilidade de um espaço e, em parte, é uma consequência do Teorema de Nagata-Smirnov. Mais detalhes vide Munkres [20], Cap. 6, p. 243, ou Sims [23], Teor. 5.2, p. 103.

Para enunciar esses dois teoremas vários conceitos são necessários, dentre eles o de base *enumeravelmente localmente finita* e de espaço *paracompacto*. As demonstrações dos teoremas/ resultados serão omitidas.

(1) ***Base enumeravelmente localmente finita e o Teorema de Metrização de Nagata-Smirnov***

Definição 6.6.1. *Seja (S,τ) um espaço topológico.*
Uma família $\mathfrak{F} = \{A_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de S é denominada ***localmente finita*** *se: para todo $p \in S$, existe $V_p \in \tau$, com $p \in V_p$, tal que V_p intersecta somente um número finito de elementos de $\mathfrak{F}$.*
Uma família de subconjuntos de S é ***enumeravelmente localmente finita*** *ou* ***σ-localmente finita*** *se for a reunião enumerável de famílias localmente finitas de subconjuntos de S, ou seja uma família $\mathfrak{B}$ é enumeravelmente localmente finita se $\mathfrak{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\mathfrak{F}_n$, com cada $\mathfrak{F}_n$ localmente finita.*

Observação 6.6.2.

$i)$ Claramente toda família finita $\mathfrak{F}$ de subconjuntos de um espaço topológico S é localmente finita.

$ii)$ Uma cobertura qualquer $\{A_i\}_{i\in I}$ de S é localmente finita se para todo $p \in S$, existe um aberto V_p de S (contendo p) tal que $V_p \cap A_i \neq \emptyset$ para um número finito de $i \in I$.

$iii)$ Em $\mathbb{R}$, $\mathfrak{F} = \{]n,n+3[: n \in \mathbb{Z}\}$ é uma família que é uma cobertura localmente finita de $\mathbb{R}$.

$iv)$ Em $(\mathbb{R},\sigma_{cof})$ a família de todos os conjuntos abertos não é localmente finita.

$v)$ Se $\mathfrak{B} = \{B_1,B_2,\ldots\}$ é uma base enumerável então $\mathfrak{B}$ é enumeravelmente localmente finita, pois $\mathfrak{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\mathfrak{F}_n$, com $\mathfrak{F}_n = \{B_n\}$ localmente finita (unitária).

Como sabemos, um espaço métrico pode *não* ter base enumerável (não ser e_2 espaço), mas todo espaço métrico tem uma base enumeravelmente localmente finita, como afirmado no resultado abaixo.

Teorema 6.6.3. (Teorema de Metrização de Nagata-Smirnov) *Um espaço topológico (S,τ) é metrizável se, e somente se, S é regular, T_1 e tem uma base $\mathfrak{B}$ que é enumeravelmente localmente finita.*

Demonstração. Vide Munkres [20], Cap. 6, Teorema 40.3, §40, *p*. 250. Lembrar que em Munkres, 'regular' significa 'regular e T_1 espaço (todo subconjunto unitário é fechado)'. □

(2) ***Paracompacidade e o Teorema de Metrização de Smirnov***

Definição 6.6.4. *Seja* (S,σ) *um espaço topológico. Considere* $\mathfrak{F}=\{A_i\}_{i\in I}$ *e* $\mathfrak{F}\,'=\{B_j\}_{j\in J}$ *duas famílias de subconjuntos de S. Diz-se que* $\mathfrak{F}\,'$ *é um* ***refinamento*** *de* $\mathfrak{F}$ *se:* $\forall\, B\in\mathfrak{F}'$, $\exists\, A\in\mathfrak{F}$ *tal que* $B\subseteq A$. *Se os elementos de* $\mathfrak{F}\,'$ *são conjuntos abertos,* $\mathfrak{F}\,'$ *é chamado um* ***refinamento aberto*** *de* $\mathfrak{F}$ (*idem para fechados*).

Exemplo 6.6.5. *Se uma família* $\mathfrak{F}=\{A_i\}_{i\in I}$ *é uma cobertura de um espaço topológico S então, claramente,* $\mathfrak{F}\,'=\{\{p\},\ p\in S\}$ *é um refinamento de* $\mathfrak{F}$ (*não necessariamente aberto*).

Definição 6.6.6. *Um espaço topológico* (S,τ) *é* ***paracompacto*** *se toda cobertura aberta de S possui um refinamento aberto localmente finito que também cobre S, ou seja, para toda cobertura* $\mathfrak{C}=\{G_i\}_{i\in I}$ *de S,* $G_i\in\tau$, $\exists\,\mathfrak{C}\,'=\{U_j\}_{j\in J}$ *tal que* $U_j\subseteq G_i$, *para algum i,* $U_j\in\tau$, *e* $\forall p\in S$, $\exists\, V_p\in\tau$ *tal que* $p\in V_p$ *e* $V_p\cap U_j\neq\emptyset$ *apenas para um número finito de elementos* U_j, $j\in J$, *e ainda,* $S=\bigcup_j U_j$.

Exemplo 6.6.7. 1) *Todo espaço compacto é, claramente, paracompacto.*

2) *Todo espaço topológico discreto S é paracompacto, pois para toda cobertura aberta* $\mathfrak{C}$ *de S, a família* $\mathfrak{C}\,'=\{\{p\}:p\in S\}$ *é um refinamento aberto localmente finito de* $\mathfrak{C}$ *que cobre S. Em particular* $(\mathbb{R},\sigma_{disc})$ *é um espaço paracompacto* (*que não é compacto*).

3) $\mathbb{R}$ *com a topologia usual é um espaço paracompacto* (*que não é compacto*). *Para ver que* $\mathbb{R}$ *é paracompacto, seja* $\mathfrak{C}$ *uma cobertura aberta de* $\mathbb{R}$. *Para cada* $n\in\mathbb{Z}$, *como* $[n,n+1]$ *é compacto, existe um número finito de elementos de* $\mathfrak{C}$ *que cobre* $[n,n+1]$ (*e tem interseção não vazia com o intervalo* $]n-1,n+2[$). *Indiquemos por* $\mathcal{C}_n$ *a família finita composta de tais elementos. Então* $\mathfrak{C}'=\cup_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{C}_n$ *é um refinamento aberto localmente finito de* $\mathfrak{C}$ *que cobre* $\mathbb{R}$.

Observação 6.6.8. *O conceito de paracompacidade* (*como foi apresentado*) *estende o conceito de compacidade, uma vez que todo espaço compacto é paracompacto. Há, entretanto, autores que na definição de paracompacto exige que o espaço S seja Hausdorff* (*por exemplo, Dugundji [5], Cap.* 8, §2, *Def. 2.1, p. 162, ou Munkres* (*a first course*) *[19], Cap.* 6, §$6-4$, *Def., p. 255*). *Nesse caso, compacto e Hausdorff implica paracompacto.*

Definição 6.6.9. *Um espaço topológico* (S,τ) *é* ***localmente metrizável*** *se cada ponto* $p\in S$ *tem uma vizinhança* W_p *que* (*considerada como subespaço topológico de S*) *é um espaço metrizável.*

Claramente, todo espaço metrizável é localmente metrizável.

Proposição 6.6.10. *Seja* (S,τ) *um espaço topológico. Se S é compacto, Hausdorff, e localmente metrizável então S é metrizável.*

Demonstração. A ideia é mostrar que S é um e_2 espaço. Daí o resultado segue do Teorema de Metrização de Urysohn, uma vez que todo espaço compacto e Hausdorf é regular/normal (e T_1). Para ver que o espaço é e_2 vamos mostrar que ele é uma união finita de subespaços abertos que são e_2. Para cada $p \in S$, seja W_p uma vizinhança metrizável de p. Como S é regular (pois é compacto e de Hausdorff), para cada $p \in W_p$, existe um aberto V_p tal que $p \in V_p \subseteq \overline{V_p} \subseteq W_p$. Temos que cada $\overline{V_p}$ é e_2, pois é metrizável e compacto. Logo cada V_p é também e_2 e então possui uma base enumerável $\mathfrak{B}^p$. Ainda, $\{V_p,\ p \in S\}$ é uma cobertura aberta de S e como S é compacto, $S = V_{p_1} \cup \cdots V_{p_n}$. Facilmente verifica-se que $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^{p_1} \cup \ldots \cup \mathfrak{B}^{p_n}$ é uma base enumerável para S e, portanto, S é e_2. □

Teorema 6.6.11. (Teorema de Metrização de Smirnov) *Um espaço topológico (S,τ) é metrizável se, e somente se, (S,τ) é paracompacto, Hausdorff e localmente metrizável.*

Demonstração. A referência aqui também é Munkres [20], vide Cap. 6, §42, Teorema 42.1, p. 261.
($\Rightarrow$) Se (S,τ) é metrizável então (S,τ) é de Hausdorff e localmente metrizável, como já observamos. Agora, "se (S,τ) é metrizável então (S,τ) é paracompacto" ([20], Cap. 6, §41, Teorema 41.4, p. 257).
($\Leftarrow$) Supondo X paracompacto de Hausdorff e localmente metrizável prova-se que X tem uma base enumeravelmente localmente finita. Tem-se também que todo espaço paracompacto de Hausdorff é normal/regular ([20], Cap. 6, §41, Teorema 41.1, p. 253). Daí o espaço é regular, T_1 (visto que é Hausdorff) e tem uma base enumeravelmente localmente finita, logo é metrizável pelo Teorema de Metrização de Nagata-Smirnov. □

Capítulo 7

Espaços Métricos Completos

"Um matemático que não tenha também algo de poeta, jamais será um matemático completo."

(Weierstrass)

7.1 Introdução

Neste capítulo os espaços considerados serão sempre espaços métricos (M,d), e se for mencionado apenas "M um espaço métrico" subentende-se que sobre M está sendo considerada uma métrica d.

7.2 Sequências de Cauchy

Definição 7.2.1. *Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ em M é uma **sequência de Cauchy** se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $m,n > n_0$ implica $d(x_n,x_m) < \varepsilon$.*

Exemplo 7.2.2. *A sequência $(x_n)_n = (1/n)_n$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$ com a métrica usual. Se Consideramos o subespaço $M =]0,1]$, essa sequência também é de Cauchy em M.*

Proposição 7.2.3. *Seja M um espaço métrico. Então:*

(i) *Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ em M é uma sequência de Cauchy se, e somente se, $\lim\limits_{n\to\infty} d(X_n) = 0$, onde $d(X_n)$ indica o diâmetro de $X_n = \{x_n,\, x_{n+1},\, x_{n+2}, \ldots\}$.*

(ii) *Toda sequência de Cauchy em M é limitada.*

(iii) *Toda subsequência de uma sequência de Cauchy em M é uma sequência de Cauchy.*

(iv) *Se uma subsequência de uma sequência de Cauchy em M converge para um ponto, então a sequência converge para este ponto.*

(v) *Toda sequência em M convergente é uma sequência de Cauchy.*

(vi) *Seja N um espaço métrico. A imagem de uma sequência de Cauchy em M por uma aplicação uniformemente contínua $f : M \to N$ é uma sequência de Cauchy em N.*

(vii) *Duas métricas uniformemente equivalentes d e d' sobre M (Definição 4.4.15) determinam as mesmas sequências de Cauchy.*

Demonstração. (i) Suponhamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ seja uma sequência de Cauchy. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$, tal que $m,n > n_0$ implica $d(x_n,x_m) < \varepsilon$. Assim, se $n > n_0$, então $d(X_n) = \sup\{d(x_i,x_j) : x_i,x_j \in X_n\} < \varepsilon$, de modo que $\lim d(X_n) = 0$. Reciprocamente, se $\lim d(X_n) = 0$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $n > n_0$ implica $d(X_n) = \sup\{d(x_i,x_j) : x_i,x_j \in X_n\} < \varepsilon$, ou seja, para $m,n > n_0$, $d(x_m,x_n) \leq d(X_n) < \varepsilon$ e a sequência (x_n) é uma sequência de Cauchy.

(ii) Para $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $d(x_m,x_n) < 1$ se $m,\ n > n_0$. Sejam $a = sup\{d(x_n,x_m),\ n,\ m \leq n_0\}$, $b = d(x_{n_0},x_{n_0+1})$, e $k = a+b+1$. Então, dados $n,\ m \geq 1$, se $n,\ m \leq n_0$, $d(x_n,x_m) \leq a \leq k$; se $m,\ n > n_0$, $d(x_n,x_m) < 1 \leq k$ e, para $n \leq n_0$ e $m > n_0$, tem-se

$$d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x_{n_0}) + d(x_{n_0},x_{n_0+1}) + d(x_{n_0+1},x_m) < a+b+1 = k.$$

Portanto, $d(X) \leq k$, para $X = \{x_1,x_2,...\}$, e assim a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ é limitada.

(iii) Imediata.

(iv) Sejam (x_n) uma sequência de Cauchy em M e (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n) que converge para $x \in M$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tal que $m,\ n > n_1$ implica $d(x_m,x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ e existe $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tal que $n_k > n_2$ implica $d(x_{n_k},x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Considere $n_0 = \max\{n_1,n_2\}$ e um elemento n_k, com $n_k > n_0$. Então, para todo $n > n_0$, temos

$$d(x_n,x) < d(x_n,x_{n_k}) + d(x_k,x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto $\lim x_n = x$.

(v) Se (x_n) converge para $x \in M$, então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $n > n_0$ implica $d(x_n,x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Assim, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que se $m,\ n > n_0$, então

$$d(x_m,x_n) \leq d(x_m,x) + d(x,x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo (x_n) é uma sequência de Cauchy.

(vi) Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ uma sequência de Cauchy em M, $f : M \to N$ uma aplicação uniformemente contínua e $z_n = f(x_n)$. Mostremos que (z_n) é sequência de Cauchy em N. De fato, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x,y) < \delta$ implica $d(f(x),f(y)) < \varepsilon$. Como (x_n) é uma sequência de Cauchy em M, dado $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $m,\ n > n_0$ implica $d(x_n,x_m) < \delta$. Assim, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $m,\ n > n_0 \Rightarrow d(x_m,\ x_n) < \delta \Rightarrow d(f(x_m),f(x_n)) < \varepsilon \Rightarrow d(z_m,z_n) < \varepsilon$.
Portanto (z_n) é uma sequência de Cauchy.

(vii) Segue do item (vi). □

Observação 7.2.4. *Se $f: M \to N$ é uma aplicação continua entre dois espaços métricos e $(x_n)_n$ é uma sequência de Cauchy em M não podemos garantir que $(f(x_n))_n$ seja uma sequência de Cauchy em N. Tome, por exemplo, $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$; $f(x) = 1/x$ e $(x_n)_n = (1/n)_n$. Tem-se que f é contínua, $(x_n)_n$ é de Cauchy, mas $(f(x_n))_n = (n)_n$ não é de Cauchy.*

7.3 Espaços Métricos Completos

Definição 7.3.1. *Um espaço métrico (M,d) é denominado* **completo** *se toda sequência de Cauchy em M converge para um ponto de M.*

Exemplo 7.3.2. 1) *(M,d_{01}) é completo.*

2) *$(\mathbb{Q}, d_{usual})$ não é completo. De fato, a sequência (x_n) dada por $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_n = \frac{1}{x_{n-2}} + \frac{1}{x_{n-1}}$, $n \geq 3$, converge em $\mathbb{R}$ para $\sqrt{2}$ (verifique!), que não é racional. Também, de um modo um pouco impreciso, a sequência em $\mathbb{Q}$, $(y_n)_n = (1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ 1{,}41421;\ldots)$ converge para $\sqrt{2}$ (onde subentende-se que os próximos termos acompanham as aproximações de $\sqrt{2}$).*

Proposição 7.3.3. *Todo espaço métrico compacto M é completo.*

Demonstração. Se (x_n) é uma sequência de Cauchy em M, com M compacto, então (x_n) admite uma subsequência convergente para um ponto de M (pois um espaço métrico M é compacto se, e somente se, é sequencialmente compacto). Deste modo, pelo item (iv) da Proposição 7.2.3, (x_n) é convergente e portanto (M,d) é completo. □

Observação 7.3.4. *A recíproca do resultado anterior obviamente não é verdadeira. Como veremos abaixo, $\mathbb{R}$ é completo, mas não é compacto. No Exercício* 7.3.1-1*, ao final desta seção, é dada uma recíproca parcial* (*considera-se M completo e "totalmente limitado"*).

Proposição 7.3.5. $\mathbb{R}$ (*com a métrica usual) é completo.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Mostremos que (x_n) tem uma subsequência convergente e, com isso, a própria sequência será convergente. De fato, se (x_n) é de Cauchy, então (x_n) é limitada. Se o conjunto dos termos da sequência $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ é finito, a sequência contém uma subsequência constante, que é convergente. Suponhamos A infinito. Como A é limitado, $A \subseteq [a_1, b_1] = I_1$. Como A é infinito, $A \cap \left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ ou $A \cap \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ é infinito. Seja $I_2 = [a_2, b_2]$ um dos dois intervalos que contenha infinitos pontos de A. Da mesma forma, $A \cap \left[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}\right]$ ou $A \cap \left[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2\right]$ é infinito. Denotamos por I_3 um destes intervalos que contém infinitos pontos de A. Desta maneira, obtemos uma sequência $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$ decrescente de intervalos fechados tais que cada I_n contém infinitos pontos de A e $\lim d(I_n) = 0$ (diâmetro de I_n).

Pelo *Princípio dos Intervalos Encaixados* (cuja demonstração será dada abaixo), existe $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$ e x é ponto de acumulação de A, pois dado qualquer conjunto aberto G contendo x, existe $\varepsilon > 0$ tal que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq G$. Por outro lado, como $\lim d(I_n) = 0$ e $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $d(I_{n_0}) < \varepsilon$ e $I_{n_0} \subseteq\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq G$, de modo que G contém infinitos pontos de A, visto que I_{n_0} tem infinitos pontos de A. O ponto x será limite de uma subsequência de (x_n) e, consequentemente, a sequência (x_n) (que é de Cauchy) converge.

Resta a verificação do P*rincípio dos Intervalos Encaixados*, isto é: se $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}^*$, são intervalos fechados não vazios de $\mathbb{R}$ tais que tais que $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$ e $\lim d(I_n) = 0$, então $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} I_n \neq \emptyset$. Com efeito, como $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$, devemos ter $a_1 \leq a_2 \leq \cdots$, $b_1 \geq b_2 \geq \cdots$, e $a_n \leq b_m$, para todos n, $m \in \mathbb{N}^*$ (pois fixado m, se $n \leq m$, $a_n \leq a_m \leq b_m$, e se $m \leq n$, $a_n \leq b_n \leq b_m$). Seja $x = \sup\{a_i : i \in \mathbb{N}^*\}$. Temos $a_n \leq x$ e $x \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, de modo que $x \in I_n$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Assim $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$. $\square$

Observação 7.3.6. *De fato pode-se provar que um espaço métrico M é completo se, e e somente se, toda sequência encaixada de conjuntos fechados não vazios, cujo diâmetros tendem a zero, tem interseção não vazia.* (*Vide Lipschutz [17], Cap. 14, Teor. 14.2, p. 254.*)

Proposição 7.3.7. *O produto finito de espaços métricos $M = M_1 \times \cdots \times M_m$ é completo se, e somente se, cada um dos fatores M_i é completo. Em consequência $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, é completo.*

Demonstração. Um sequência no produto cartesiano é uma sequência de Cauchy se, e somente se, cada coordenada é uma sequência de Cauchy. Também, uma sequência no produto é convergente se, e somente se, a sequência em cada coordenada é convergente. O resultado segue dessas duas afirmações. $\square$

Proposição 7.3.8. *Seja F um subespaço de um espaço métrico completo M. Então F é completo se, e somente se, F é fechado.*

Demonstração. Suponhamos F completo. Seja $x \in \overline{F}$. Então existe uma sequência (x_n) em F que converge para um ponto $x \in \overline{F} \subseteq M$. Como (x_n) é convergente, (x_n) é de Cauchy em M e portanto, também de Cauchy em F. Logo essa sequência converge para um ponto $a \in F$, visto que por hipótese F é completo. Pela unicidade do limite (em espaços métricos), temos $a = x$, logo $x \in F$ e portanto $F = \overline{F}$ é fechado.

Reciprocamente, se F é fechado, seja (x_n) uma sequência de Cauchy em F. Em particular, (x_n) é de Cauchy em M, e como M é completo, (x_n) converge para $x \in M$. Assim $x \in \overline{F} = F$, pois F é fechado. Portanto F é completo. $\square$

Observação 7.3.9. i) *Ser completo não é propriedade topológica. Por exemplo, os espaços $]-1,1[$ e $\mathbb{R}$ com métricas usuais são homeomorfos, $\mathbb{R}$ é completo, porém $]-1,1[$ não é.*

ii) *Se $f : M \to N$ é um homeomorfismo uniforme e M completo então N é completo, ou seja ser completo é propriedade uniforme* (*vide Exercício 7.3.1-3*). *Em particular, se duas métricas d_1 e d_2*

em M são uniformemente equivalentes, (M,d_1) *é completo se, e somente se,* (M,d_2) *é completo. Isto ocorre, por exemplo, para d uma métrica qualquer em M e* $\overline{d}(x,y) = min\ \{d(x,y);1\}$.

iii) Um produto qualquer de espaços métricos completos não é necessariamente um espaço métrico completo, de fato o produto qualquer de espaço métricos pode nem ser um espaço métrico (vide Munkres [20], Cap. 2, §21, Exemplo 2, p. 133). A metrizabilidade para o caso de produto finito de espaços métricos foi tratada no Exemplo 2.7.3, e para um produto enumerável vide Lima [14] (Cap. 9, §3, Prop. 6, p. 247).

7.3.1 Exercícios

1) Seja (M,d) um espaço métrico. Mostre que M é compacto se, e somente se, M é completo e totalmente limitado. (*Sugestão*: ($\Leftarrow$) mostre que M é sequencialmente compacto e assim compacto. Para tanto mostre primeiro que se (x_n) é uma sequência em um espaço métrico totalmente limitado então ela possui uma subsequência de Cauchy, depois use que M é completo. Para obter uma tal subsequência (no caso em que $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ é infinito) note que para $\varepsilon = 1$, existe uma bola $B_1 = B_d(p_i, 1)$ da $1 - rede$ (do conjunto totalmente limitado M) que contém infinitos elementos de A. Considere o conjunto infinito $N_1 = \{n \in \mathbb{N}^* : x_n \in B_1\}$, observe que para $\varepsilon = 1/2$, existirá uma bola $B_2 = B_d(q_j, 1/2)$ da $1/2 - rede$ que contém infinitos elementos de N_1, seja $N_2 = \{n \in N_1 : x_n \in B_2\}$, continue assim para obter N_k para cada $1/k$. Tome então x_{n_k}, com $n_k \in N_k$, e $n_{k-1} < n_k$). (Lipschutz [17], Cap. 14, Exerc. 20, p. 264.)

2) Seja A um subespaço de um espaço métrico completo. Mostre que A é compacto se, e somente se A é fechado e totalmente limitado. Em particular, $\overline{A}$ é compacto se, e somente se, A é totalmente limitado. (Lipschutz [17], Cap. 14, Exerc. 21, p. 265.)

3) Sejam M e N espaço métricos. Se $f : M \to N$ é um homeomorfismo uniforme e M completo prove que N é completo.

4) Seja M um espaço métrico completo e $f : M \to M$ uma *contração* (i. é, f satisfaz $d(f(x), f(y)) \leq c.d(x,y)$, $\forall\ x,y \in M$, com $0 < c < 1$). Então f admite um único ponto fixo p (ou seja, existe $p \in M$ tal que $f(p) = p$). Esse ponto pode ser obtido como o limite da sequência $(x_0, f(x_0), f(f(x_0)), \ldots)$, para qualquer ponto x_0 em M. (Domingues [4], Cap. VII, §4, Teor. 2, p. 154.)

7.4 Completamento de um Espaço Métrico

Mostraremos nesta seção que todo espaço métrico é subespaço de um espaço métrico completo. Dado um espaço métrico (M,d), construiremos um espaço $(\widehat{M},\widehat{d})$ completo e minimal com $M \subseteq \widehat{M}$ (mais precisamente, com M homeomorfo a um subespaço de $\widehat{M}$).

Tal construção quando aplicada ao conjunto dos números racionais com a métrica usual, fornece o conjunto dos números reais, de modo que se obtém uma construção do conjunto dos números reais a partir do conjunto dos números racionais.

Observação 7.4.1. *É fácil ver que toda imersão isométrica $f : M \to N$ é uma aplicação injetora e uniformemente contínua. Consequentemente, $f : M \to f(M)$ será um homeomorfismo uniforme (uma vez que a inversa também será uma imersão isométrica). Em particular toda isometria é um homeomorfismo uniforme.*

Definição 7.4.2. *Um* ***completamento*** *de um espaço métrico (M,d) é um par $((\widehat{M},\widehat{d}\,),f)$, também denotado simplesmente por $(\widehat{M},f)$, tal que:*

(1) *$(\widehat{M},\widehat{d})$ é um espaço métrico completo,*

(2) *$f : M \to \widehat{M}$ é uma imersão isométrica e,*

(3) *$f(M)$ é um subconjunto denso de $\widehat{M}$.*

Exemplo 7.4.3. 1) *Se $M =]0,1[$ com a métrica usual, então $\widehat{M} = [0,1]$ com $f : M \to \widehat{M}$ a inclusão e $\widehat{d}$ a métrica usual é um completamento de M.*

2) *Considere $\mathbb{Q}$ com a métrica usual. Tomando $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ como sendo a inclusão, obtemos o completamento $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$.*

3) *Se M é completo, então $\widehat{M} := M$ e $f : M \to \widehat{M}$ a identidade é um completamento de M.*

Observação 7.4.4. *Se M é completo então M é o único completamento de M, a menos de isometria. De fato, seja $(\widehat{M},f)$ um completamento de M. Como $f : M \to \widehat{M}$ é uma imersão isométrica, $f(M)$ é completo. Pela Proposição 7.3.8, $f(M)$ é fechado em $\widehat{M}$. Agora, usando que $f(M)$ é denso em $\widehat{M}$, segue que $f(M) = \overline{f(M)} = \widehat{M}$, de modo que f é sobrejetora. Daí $f : M \to f(M) = \widehat{M}$ é uma isometria (homeomorfismo uniforme) e $\widehat{M} = f(M)$ é "isométrico" a M.*

Mais geralmente tem-se o seguinte resultado:

Proposição 7.4.5. *Sejam $(\widehat{M},f)$ e $(\widetilde{M},g)$ completamentos de um espaço métrico. Então existe uma única isometria $\varphi : \widehat{M} \to \widetilde{M}$ tal que $\varphi \circ f = g$.*

Demonstração. Seja $x \in \widehat{M}$. Como $f(M)$ é denso em $\widehat{M}$, existe uma sequência (y_n) em $f(M)$ tal que $y_n \to x$, e $y_n = f(x_n)$, com $x_n \in M$, cada n. Como f é imersão isométrica, e $f(x_n) \to y$, a sequência (x_n) de M é de Cauchy. Definimos $\varphi(x) = \lim g(x_n)$. O limite existe, pois, como (x_n) é de Cauchy e g é imersão isométrica, segue que $g(x_n)$ é uma sequência de Cauchy em $\widetilde{M}$ e, por ser $\widetilde{M}$ completo, a sequência converge. Para a unicidade, observe que se φ e ψ são isometrias (de $\widehat{M}$ em $\widetilde{M}$) tais que $\varphi \circ f = g$ e $\psi \circ f = g$ então as restrições $\varphi|_{f(M)} = \psi|_{f(M)}$ e, como $f(M)$ é denso em $\widehat{M}$, segue-se que $\varphi = \psi$. $\square$

Proposição 7.4.6. *Seja (M,d) um espaço métrico. Se existe $A \subseteq M$ tal que $A \neq \emptyset$, $\overline{A} = M$ e toda sequência de Cauchy de A converge em M, então M é completo.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em M. Vamos obter uma sequência de Cauchy em A "próxima" de (x_n). Para todo $\varepsilon > 0$, existe n_0, tal que $m,n \geq n_0$ implica $d(x_m,x_n) < \varepsilon/3$. Como A é denso em M, $x_k \in \overline{A}$, para cada k, e portanto, $B(x_k, 1/k) \cap A \neq \emptyset$, assim existe $a_k \in A$; $d(x_k,a_k) < 1/k$. Daí existe k_0 ($k_0 > max\{n_0, 3/\varepsilon\}$), tal que $m,n \geq k_0$ implica $d(a_m,a_n) \leq d(a_m,x_m) + d(x_m,x_n) + d(x_n,a_n) < \varepsilon$. Por hipótese (a_n) converge para um ponto $p \in M$ e, facilmente, prova-se que (x_n) também converge para p. □

Proposição 7.4.7. *Todo espaço métrico (M,d) possui um completamento.*

Demonstração. • *Construção de $\widehat{M}$ e $\widehat{d}$.*
Sejam (M,d) um espaço métrico e $\mathfrak{C}$ o conjunto de todas as sequências de Cauchy de M. Em $\mathfrak{C}$ definimos a relação: duas sequências (x_n) e (y_n) estão relacionadas, e escrevemos $(x_n)\ \mathcal{R}\ (y_n)$, se $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = 0$. Essa relação resulta numa relação de equivalência sobre $\mathfrak{C}$. Seja $\widehat{M} = \mathfrak{C}/\mathcal{R}$ o conjunto quociente e denote $\overline{(x_n)}$ a classe de equivalência de um elemento (x_n) de $\mathfrak{C}$. Assim, dados $\alpha = \overline{(x_n)}$ e $\beta = \overline{(y_n)}$ em $\widehat{M}$, podemos definir

$$\widehat{d} : \widehat{M} \times \widehat{M} \to \mathbb{R}; \quad \widehat{d}(\alpha,\beta) = \widehat{d}(\overline{(x_n)}, \overline{(y_n)}) := \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n).$$

Essa aplicação está bem definida e é uma métrica no conjunto $\widehat{M}$ (exercício). Para concluir que a sequência $(d_n)_n := (d(x_n,y_n))_n$ converge use o fato que: $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ sequências de Cauchy em M implica $(d_n)_n$ sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ (visto que $|d_n - d_m| = |d(x_n,y_n) - d(x_m,y_n) + d(x_m,y_n) - d(x_m,y_m)| \leq |d(x_n,y_n) - d(x_m,y_n)| + |d(x_m,y_n) - d(x_m,y_m)| \leq d(x_n,x_m) + d(y_n,y_m)$), e que $\mathbb{R}$ é completo. Ainda, $d(x_n,y_n) \geq 0$ para todo n, implica que o limite também é maior ou igual a zero. A definição não depende dos representantes das classes, pois se $\alpha = \overline{(x_n)} = \overline{(x'_n)}$ e $\beta = \overline{(y_n)} = \overline{(y'_n)}$, então $\lim d(x_n,x'_n) = 0$ e $\lim d(y_n,y'_n) = 0$, donde segue que $\widehat{d}(\overline{(x'_n)}, \overline{(y'_n)}) = \lim_{n\to\infty} d(x'_n,y'_n) = \lim_{n\to\infty}[d(x_n,x'_n) + d(x'_n,y'_n) + d(y'_n,y_n)] \geq \lim d(x_n,y_n) = \widehat{d}(\overline{(x_n)}, \overline{(y_n)})$, e, de maneira análoga, $\widehat{d}(\overline{(x_n)}, \overline{(y_n)}) \geq \widehat{d}(\overline{(x'_n)}, \overline{(y'_n)})$, e assim obtém-se a igualdade.
Agora, pode-se verificar que $\widehat{d}$ é uma métrica sobre $\widehat{M}$ (exercício), assim, $(\widehat{M}, \widehat{d})$ é um espaço métrico.

• *Imersão isométrica.* Dado $x \in M$, indicando por $\widehat{x}$ a classe de equivalência da sequência constante $x_n = x$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$; a aplicação

$$f : M \to \widehat{M}, \text{ dada por } f(x) = \widehat{x} = \overline{(x,x,\ldots)}$$

é uma imersão isométrica (exercício) e, portanto, uma isometria de M sobre $f(M)$.

• *$f(M)$ é um subconjunto denso de $\widehat{M}$.* Para ver que $f(M)$ é denso em $\widehat{M}$, tome $\alpha = \overline{(x_n)} \in \widehat{M}$ e $\varepsilon > 0$. Vamos mostrar que $B_{\widehat{d}}(\alpha,\varepsilon) \cap f(M) \neq \emptyset$. Como $(x_n)_n$ é de Cauchy em M, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$; $d(x_n,x_m) < \varepsilon/2$, para todos n, $m \geq n_0$. Tome $a = x_{n_0}$ e $\widehat{a} = \overline{(x_{n_0}, x_{n_0}, \ldots)} \in f(M)$. Temos que $\widehat{d}(\alpha, \widehat{a}) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,a) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x_{n_0}) \leq \varepsilon/2$. Assim, $\widehat{a} \in B_{\widehat{d}}(\alpha,\varepsilon) \cap f(M)$.

• *Verificação de que $(\widehat{M}, \widehat{d})$ é completo.* Vejamos, primeiramente, que toda sequência de Cauchy em $f(M)$ converge para um elemento de $\widehat{M}$. Seja $(\widehat{a_n})_n$ uma sequência de Cauchy em $f(M)$ ($\widehat{a_n} = f(a_n)$, a classe da sequência constante em $a_n,\ a_n \in M$). Considere a sequência $(a_n)_n$ em M. Como $\widehat{d}\,(\widehat{a_n},\widehat{a_m}) = d(a_n,a_m)$, segue que (a_n) é de Cauchy em M. Seja $\beta = \overline{(a_n)} \in \widehat{M}$. Mostremos que $(\widehat{a_n})_n$ converge para $\beta \in \widehat{M}$: dado $\varepsilon > 0$, como $(\widehat{a_n})_n$ é de Cauchy, existe n_0; $\widehat{d}\,(\widehat{a_n},\widehat{a_m}) < \varepsilon/2$, para todos $n,m \geq n_0$. Daí, se $n \geq n_0$, $\widehat{d}\,(\widehat{a_n},\beta) = \lim\limits_{m\to\infty} d(a_n,a_m) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$.

Agora, como $f(M)$ é denso em $\widehat{M}$ segue, da Proposição 7.4.6, que $\widehat{M} = \overline{f(M)}$ é completo. □

Corolário 7.4.8. *Todo espaço métrico possui um único completamento, a menos de isometria.*

Demonstração. Segue das Proposições 7.4.5 e 7.4.7. □

7.5 Espaços de Baire

Definição 7.5.1. *Sejam (S,σ) um espaço topológico e $A \subseteq S$. Diz-se que A é **magro** em S , ou de **primeira categoria**, quando A é uma reunião enumerável $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$, com $(\overline{A}_n)^\circ = \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$ (ou seja, A é uma reunião enumerável de conjuntos nunca densos). Quando A não satisfaz essa condição diz-se que A é de **segunda categoria**.*

Proposição 7.5.2. *Sejam (S,σ) um espaço topológico e $A \subseteq S$. Então A é magro em S se, e somente se, $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$, com F_n fechado e $(F_n)^\circ = \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Por hipótese A é magro em S. Assim, $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$, com $(\overline{A}_n)^\circ = \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Daí, $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \overline{A}_n$, e portanto basta tomar $F_n = \overline{A}_n$.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$, com F_n fechado e $(F_n)^\circ = \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Tome $A_n = F_n \cap A$. Então $(\overline{A}_n)^\circ = \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, (pois $(\overline{A}_n)^\circ \subseteq (\overline{F_n} \cap \overline{A})^o = (F_n)^\circ \cap \overline{A}^o = \emptyset$) e $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$. □

Exemplo 7.5.3. 1) *Todo subconjunto enumerável $A = \{a_1,a_2,....\}$ num espaço de Hausdorff S, sem pontos isolados é magro. Isto segue do fato que $A = \bigcup_n \{a_n\}$ com $\overline{\{a_n\}} = \{a_n\}$ e $(\{a_n\})^\circ = \emptyset$, uma vez que S é Hausdorff e os pontos a_n não são isolados. Assim, $\mathbb{Q}$ é magro em $\mathbb{R}$ ($\mathbb{Q}$ também é magro em $\mathbb{Q}$).*

2) *No plano $\mathbb{R}^2$ o conjunto $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ (dos pontos de coordenadas racionais) é magro. Também é magro em $\mathbb{R}^2$ o conjunto (não enumerável) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}\times\mathbb{R}$.*

3) *O conjunto de Cantor é magro em $\mathbb{R}$ (Lima [14], Cap. 6, Exemplo 21, p. 162).*

4) *A fronteira de todo subconjunto aberto de um espaço topológico é magro. De fato, dado um aberto U de um espaço topológico, considere $A_1 = Fr(U) = \overline{U} \cap \overline{U^c}$. Então, usando que $\overline{U}^{\,c} = (U^c)^\circ$ e que U^c é fechado, obtemos que $(\overline{A_1})^\circ = (\overline{U})^o \cap (U^c)^o = (\overline{U})^o \cap \overline{U}^{\,c} = \emptyset$.*

Definição 7.5.4. *Um espaço topológico (S,σ) é um espaço de **Baire** se todo subconjunto magro de S tem interior vazio. Isto é, para toda reunião $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \subseteq S$, com $(\overline{A}_n)^\circ = \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, tem-se $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n)^o = \emptyset$*

Observação 7.5.5. *Notemos que um espaço* (S,σ) não *é um espaço de Baire se existe* $A \subset S$*,* A *magro tal que* $A^\circ \neq \emptyset$ *(i.é existe* $A \subseteq S$ *tal que* $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ *com* $(\overline{A}_n)^\circ = \emptyset$*, para todo* $n \in \mathbb{N}^*$*, mas* A° *é não vazio).*

Exemplo 7.5.6. 1) *O espaço* $S = \mathbb{Z}$ *com a topologia induzida da reta é um espaço de Baire, pois não contradiz a definição, já que* $\mathbb{Z}$ *não contém subconjuntos magros.*

2) *O espaço* $\mathbb{Q}$ *dos racionais com a topologia induzida de* $\mathbb{R}$ *não é um espaço de Baire, pois* $A = \mathbb{Q}$ *é um subconjunto magro em* $\mathbb{Q}$ *e, em* $\mathbb{Q}$*,* $\mathbb{Q}^\circ = \mathbb{Q} \neq \emptyset$*.*

O resultado seguinte nos dá uma forma (equivalente) de definir espaço de *Baire*. Essa é a definição de espaço de Baire apresentada em Munkres [20] (Cap. 8, §48, *p*. 295).

Proposição 7.5.7. *Um espaço topológico* (S,σ) *é um espaço de Baire se, e somente se, toda reunião enumerável de subconjuntos fechados de S com interior vazio, tem interior vazio.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Sejam $\{F_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ uma família enumerável de fechados de S com interior vazio e $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$. Então A é magro, pois $(\overline{F}_n)^\circ = (F_n)^\circ = \emptyset$. Agora, como (S,σ) é um espaço de Baire, $A^\circ = \emptyset$.

$(\Leftarrow)$ Seja $A \subseteq S$, A um conjunto magro. Então $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$, com $(\overline{A}_n)^\circ = \emptyset$. Por hipótese $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \overline{A}_n\right)^\circ = \emptyset$. Assim,

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \overline{A}_n \Rightarrow A^\circ \subseteq \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \overline{A}_n\right)^\circ = \emptyset.$$

Portanto $A^\circ = \emptyset$ e S é um espaço de Baire. □

Temos uma outra definição equivalente usando interseção de abertos e densos.

Proposição 7.5.8. *Seja* (S,σ) *um espaço topológico. Então S é um espaço de Baire se, e somente se, toda interseção enumerável de abertos densos em S é denso em S.*

Demonstração. O resultado segue essencialmente do fato que dado $Y \subseteq S$, $(Y^c)^\circ = (\overline{Y})^c$ e $(Y^o)^c = \overline{Y^c}$.
$(\Rightarrow)$ Suponhamos que S seja um espaço de Baire. Considere $X = \bigcap U_n$ a interseção de uma família enumerável de subconjuntos U_n abertos e densos em S. Então $X^c = \bigcup (U_n)^c$, com $(U_n^c)^\circ = (\overline{U_n})^c = S^c = \emptyset$. Logo X^c é magro em S. Como o espaço S é Baire $(X^c)^\circ = \emptyset$. Daí, $(\overline{X})^c = (X^c)^\circ = \emptyset$, e assim $\overline{X} = S$.

$(\Leftarrow)$ Exercício. □

Teorema 7.5.9 (Teorema de Baire para Espaços Métricos)**.** *Todo espaço métrico completo é um espaço de Baire.*

Demonstração. Sejam (M,d) um espaço métrico completo e $\{A_1,A_2,A_3,\ldots\}$ uma família enumerável de abertos e densos em M. Provemos que $A = \bigcap_{i\in\mathbb{N}^*} A_i$ é denso em M. Para isso mostraremos que toda bola aberta (arbitrária) B_1 de M contém algum ponto de A. De fato, como A_1 é aberto e denso em M, e B_1 é uma bola aberta, $B_1 \cap A_1$ é aberto e *não vazio*, de modo que contém uma bola B_2, a qual pode ser escolhida de modo que seu raio não exceda $\frac{1}{2}$ e seu fecho esteja contido em $B_1 \cap A_1$. Assim, $\overline{B}_2 \subseteq B_1 \cap A_1 \subseteq B_1 \subseteq \overline{B}_1$. Similarmente, como A_2 é aberto e denso em M, $B_2 \cap A_2$ é aberto e não vazio. Logo existe B_3 de raio menor que $\frac{1}{3}$ tal que $\overline{B}_3 \subseteq B_2 \cap A_2 \subseteq B_2 \subseteq \overline{B}_2$. Prosseguindo, obtemos uma sequência $\overline{B}_1 \supseteq \overline{B}_2 \supseteq \overline{B}_3 \supseteq \cdots$, com $\overline{B}_{n+1} \subseteq B_n \cap A_n \subseteq B_n$ e $\lim d(\overline{B}_n) = 0$ (onde $d(\overline{B}_n)$ indica o diâmetro de $\overline{B}_n$). Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ escolha um ponto $x_n \in \overline{B}_n$. A sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ é uma sequência de Cauchy, pois dado $\varepsilon > 0$, tome $n_0 > 0$ tal que $1/n_0 < \varepsilon/2$. Daí, para todo $n > n_0$, $x_n \in \overline{B}_n \subset B_{n_0}$. Assim, para $m,n > n_0$, $d(x_n,x_m) \le d(B_{n_0}) \le 2/n_0 < \varepsilon$. Como M é completo, existe $x = \lim x_n$. Daí, segue que $x \in \overline{B}_n$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. De fato, dado $n \in \mathbb{N}^*$ (arbitrário), temos que para todo $m > n$, $x_m \in \overline{B}_m \subset B_n$. Assim $\lim x_m = x \in \overline{B}_n$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Das inclusões, $\overline{B}_{n+1} \subseteq B_n \cap A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, segue que $x \in B_n \cap A_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Assim, $x \in B_1$ e $x \in \cap A_n = A$, ou seja, $x \in B_1 \cap A$. Portanto, $B_1 \cap A \neq \emptyset$, o que conclui a prova. □

Corolário 7.5.10. (i) *$\mathbb{R}$ com a métrica usual é um espaço de Baire. Também são espaços de Baire $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$.*

(ii) *Todo espaço métrico completo M contendo apenas uma quantidade enumerável de pontos deve possuir um ponto isolado.*

(iii) *Todo espaço métrico compacto é de Baire.*

Demonstração. (i) Segue do fato que $\mathbb{R}^n$, $n \ge 1$, é completo e do teorema anterior.

(ii) Se M não possui pontos isolados, como M é enumerável, M seria magro em M com interior não vazio (em M), e assim não seria Baire, o que contradiz o teorema anterior.

(iii) Todo espaço métrico compacto é completo, logo o resultado segue do teorema anterior. □

Proposição 7.5.11. (i) *Sejam (S,σ) um espaço de Baire e $U \subseteq S$ um subconjunto aberto. Então (U,σ_U) é um espaço de Baire.*

(ii) *Se todo ponto de um espaço topológico (S,σ) tem uma vizinhança que é um espaço de Baire, então S é um espaço de Baire.*

(iii) *O complementar de um subconjunto magro em um espaço de Baire é um espaço de Baire.*

Demonstração. (i) Sejam (S,σ) um espaço de Baire e $U \subseteq S$ um subconjunto aberto. Mostremos que U é um espaço de Baire. Pela proposição anterior basta mostrar que toda *interseção $X = \bigcap U_n$ de uma família enumerável de subconjuntos $U_n \subseteq U$, abertos e densos em U é um subconjunto denso em*

U. Considere, para cada $n = 1,2,...,$ $B_n := U_n \cup (S - \overline{U}) = U_n \cup (\overline{U})^c$, e seja $T = \bigcap B_n$. Observemos que $T \cap U = (\bigcap B_n) \cap U = (\bigcap (U_n \cup (S - \overline{U}))) \cap U = ((\bigcap U_n) \cup (S - \overline{U})) \cap U = (X \cup (S - \overline{U})) \cap U = (X \cap U) \cup ((S - \overline{U}) \cap U) = X \cup \emptyset = X$. Logo devemos mostrar que $X = T \cap U$ é denso em U. A prova consistirá em provar: (1^o) que T é denso em S, e (2^o) que $T \cap U = X$ é denso em U.

(1^o) Vejamos que T é denso em S. Como S é de Baire é suficiente mostrar, pela Proposição 7.5.8, que cada B_n é aberto e denso em S.

(1.1) B_n é aberto de S: Temos que U_n é aberto de U e U é aberto de S, então U_n é aberto de S. Além disso, $S - \overline{U}$ é aberto de S. Logo $B_n = U_n \cup (S - \overline{U})$ é aberto de S.

(1.2) B_n é denso em S: Seja $x \in S$ um ponto qualquer. Mostremos que $G \cap B_n \neq \emptyset$, para todo aberto G de S contendo x. Temos $S = U \cup Fr(U) \cup (S - \overline{U})$. Assim, $x \in S \Rightarrow x \in U$ ou $x \in Fr(U)$ ou $x \in S - \overline{U}$. Se $x \in U$, então $x \in G \cap U$. Logo $G \cap U$ é aberto de U contendo x e portanto $G \cap U_n = G \cap (U \cap U_n) = (G \cap U) \cap U_n \neq \emptyset$ pois U_n é denso em U. Assim, $G \cap (U_n \cup (S - \overline{U})) \neq \emptyset$, isto é, $G \cap B_n \neq \emptyset$. Se $x \in Fr(U)$, então por definição de fronteira, como G é aberto e $x \in G$, $G \cap U \neq \emptyset$. Logo $G \cap U$ é um aberto não vazio de U. Como na situação anterior, podemos concluir que $G \cap B_n \neq \emptyset$. Se $x \in (S - \overline{U})$, então $x \in G \cap (S - \overline{U})$, e deste modo, $G \cap B_n = G \cap (U_n \cup (S - \overline{U})) \neq \emptyset$. Logo em qualquer uma das três situações, concluímos que $G \cap B_n \neq \emptyset$ e assim, B_n é denso em S.

De (1.1) e (1.2) e do fato que S é Baire, obtemos que $T = \bigcap B_n$ é denso em S, como afirmado.

(2^o) Mostremos que que $X = T \cap U$ é denso em U. Como U é aberto de S, T denso em S implica $X = T \cap U$ denso em U, pois se $p \in U$ e G é um aberto de U contendo p, então $G \cap U$ é aberto de S (já que U é aberto de S) que contém p. Da densidade de T em S obtemos que $(G \cap U) \cap T \neq \emptyset$, assim $G \cap (T \cap U) \neq \emptyset$, e portanto $p \in \overline{(T \cap U)}$ (fecho em U). Logo $X = T \cap U$ é denso em U, o que conclui a prova de **(i)**.

(ii) Usaremos a caracterização de espaço de Baire por reunião de fechados. Seja $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ uma *reunião enumerável de fechados* de S com *interior vazio*. Queremos *mostrar* que $A^\circ = \emptyset$. Suponhamos, por absurdo, que $A^\circ \neq \emptyset$ e seja $p \in A^\circ$. Por hipótese existe uma vizinhança V de p que é um espaço de Baire. Como aberto num espaço de Baire é um espaço de Baire (item (i)), a vizinhança pode ser tomada aberta e contida em A (pois podemos substituir uma vizinhança inicial (de Baire) W de p que existe por hipótese, por $V = A^\circ \cap W^\circ \subset A$, de modo que $p \in V^\circ = V$). Temos então

$$V = A \cap V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (A_n \cap V)$$

é uma reunião enumerável de fechados de V com interior vazio (pois $(A_n \cap V)^\circ = (A_n)^\circ \cap V^\circ = \emptyset \cap V^\circ = \emptyset$), e como V é um espaço de Baire, esta reunião tem interior vazio, ou seja, $V^\circ = \emptyset$, absurdo! Logo não existe $p \in A^\circ$, ou seja, $A^\circ = \emptyset$.

(iii) Sejam S um espaço de Baire e $A \subseteq S$, A um conjunto magro. Queremos provar que o complementar $A^c = S - A$ é um espaço de Baire. Como A é um conjunto magro num espaço de Baire, então $A^\circ = \emptyset$ em S. Seja $B \subseteq A^c = S - A$, tal que $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$, onde os conjuntos F_n são *fechados* em $S-A$ e com *interior vazio* em $S-A$. Temos que *mostrar* que $B^\circ = \emptyset$ em $S-A$.

***Asserção*:** Se F é fechado em $S-A$ com interior vazio em $S-A$, então $\overline{F}^S$ (fecho de F em S) tem interior vazio em S.

De fato, suponhamos, por absurdo, que exista $p \in (\overline{F}^S)^\circ$ (interior em S). Então existe um aberto V_p de S contendo p tal que $V_p \subseteq \overline{F}^S$. Temos

$$V_p \cap (S-A) \subseteq \overline{F}^S \cap (S-A) = \overline{F}^{(S-A)} = F.$$

Se $V_p \cap (S-A) \neq \emptyset$ então $V_p \cap (S-A) \neq \emptyset$ será um aberto (não vazio) de $S-A$ que está contido em F, de onde segue que o interior de F em $S-A$ é não vazio, o que não ocorre. Assim $V_p \cap (S-A) = \emptyset$ e $V_p \subseteq A$, de modo que $A^\circ \neq \emptyset$, e assim temos uma contradição, pois A é um conjunto magro num espaço de Baire. Assim $(\overline{F}^S)^\circ = \emptyset$, o que justifica a *asserção*.

Temos

$$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \overline{F}_n^S,$$

e num espaço de Baire a reunião enumerável de fechados com interior vazio tem interior vazio. Logo $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \overline{F}_n^S)^\circ = \emptyset$ (em S) e portanto o interior de B é vazio em S e, com maior razão, é vazio em $S-A$. □

Corolário 7.5.12. (i) $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ *é um espaço de Baire.*

(ii) $\mathbb{Q}$ *com a métrica usual, induzida de* $\mathbb{R}$*, não é interseção enumerável de abertos de* $\mathbb{R}$*.*

Demonstração. (i) É consequência de (iii) e do fato que $\mathbb{Q}$ é magro em $\mathbb{R}$ (que é Baire).

(ii) Se $\mathbb{Q} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$, com A_n aberto de $\mathbb{R}$, então cada A_n seria denso em $\mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, pois dado $p \in \mathbb{R}$ e $G =]p-\varepsilon, p+\varepsilon[$, existe $q \in G \cap \mathbb{Q}$. Mas $q \in \bigcap A_n$ implica $q \in A_n$, para todo n. Assim, $G \cap A_n \neq \emptyset$ e $p \in \overline{A_n}$. Daí, $\mathbb{R}-\mathbb{Q} = \bigcup A_n^c$ (reunião enumerável de conjuntos fechados de $\mathbb{R}$ com interior vazio), ou seja $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ seria magro. Por (iii), $\mathbb{Q}$ (o complementar) seria espaço de Baire, o que é uma contradição.

Outra forma de obter uma contradição é observar que se $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ for magro, como $\mathbb{Q}$ é magro, teríamos que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R}-\mathbb{Q})$ seria magro em $\mathbb{R}$ (que é espaço de Baire). Daí, $\mathbb{R}^o = \emptyset$ (em $\mathbb{R}$), o que é um absurdo. □

Observação 7.5.13. *Vimos que todo espaço métrico completo, e consequentemente todo espaço métrico compacto, é de Baire. Veremos a seguir que todo espaço topológico compacto e de Hausdorff é um espaço de Baire.*

Teorema 7.5.14 (Teorema de Baire para Espaços Compactos e de Hausdorff)**.** *Se* (S,σ) *é um espaço topológico compacto e de Hausdorff então* (S,σ) *é um espaço de Baire.*

Demonstração. Dada uma *família* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de fechados de* S *tal que* $(F_n)^\circ = \emptyset$, *vamos provar que* $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n)^\circ = \emptyset$. Para tanto, *basta mostrar que* $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n)^\circ$ *não contém nenhum aberto não* *vazio*. Seja então U_0 um aberto não vazio qualquer em S. Como $(F_n)^\circ = \emptyset$ para todo n, segue que $U_0 \nsubseteq F_n$ para todo n, em particular $U_0 \nsubseteq F_1$. Assim existe $y_0 \in U_0$, com $y_0 \notin F_1$. Agora, S compacto e de Hausdorff implica S regular (Proposição 6.3.10). Assim, para $y_0 \notin F_1$, F_1 fechado em S existem abertos G_1, H_1 em S tais que $y_0 \in G_1$, $F_1 \subseteq H_1$ e $G_1 \cap H_1 = \emptyset$. Ainda, usando que S é regular, $y_0 \in U_0 \cap G_1$ implica (por Proposição 6.3.9) que existe U_1, aberto de S, tal que $y_0 \in U_1 \subseteq \overline{U_1} \subseteq U_0 \cap G_1$. Temos $\overline{U_1} \cap F_1 = \emptyset$, pois $\overline{U_1} \cap F_1 \subseteq (U_0 \cap G_1) \cap F_1 = U_0 \cap (G_1 \cap F_1) = \emptyset$. Também $\overline{U_1} \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0}$. Uma vez que $U_1 \nsubseteq F_2$, existe $y_1 \in U_1$, com $y_1 \notin F_2$. De modo geral, repetindo o processo, dado U_{n-1} existe $y_{n-1} \in U_{n-1}$ tal que $y_{n-1} \notin F_n$ (pois $(F_n)^\circ = \emptyset$) obteremos (usando G_n e H_n, como no caso $n = 1$) um aberto U_n em S, não vazio, com $\overline{U_n} \cap F_n = \emptyset$ e $\overline{U_n} \subseteq U_{n-1} \subseteq \overline{U_{n-1}}$. Temos então

$$\overline{U_0} \supseteq \overline{U_1} \supseteq \ldots \supseteq \overline{U_{n-1}} \supseteq \overline{U_n} \supseteq \ldots$$

Como S é compacto e a família de fechados $\{\overline{U_n}\}_n$ satisfaz a PIF, segue que existe $x \in \bigcap_n \overline{U_n}$. Agora, $\overline{U_n} \cap F_n = \emptyset$ e $x \in \overline{U_n} \Rightarrow x \notin F_n, \forall n \Rightarrow x \notin \bigcup F_n$. Obtemos então $x \in U_0$, com $x \notin \bigcup F_n$. Assim $U_0 \nsubseteq \bigcup F_n$. Como U_0 é um aberto qualquer de S, segue que $(\bigcup F_n)^\circ = \emptyset$ e portanto S é Baire. $\square$

Observação 7.5.15. *Pode-se mostrar também que se (S,σ) é um espaço topológico localmente compacto e de Hausdorff então (S,σ) é um espaço de Baire.* (*Vide Lima [14], Cap. 7, Pro. 20, p. 202.*)

7.6 Exercícios

1) Demonstre que todo subconjunto perfeito X de um espaço métrico completo contém um conjunto sequencialmente compacto.

2) Sejam (x_n) e (y_n) sequências em um espaço métrico M tais que $\lim d(x_n, y_n) = 0$. Mostre que (x_n) é de Cauchy se, e somente se, (y_n) é de Cauchy.

3) Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ limitado. Mostre que se $p : X \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial, então existe $\lim\limits_{x \to a} p(x)$, para todo $a \in X'$.

4) Sejam M e N espaços métricos e $f : M \to N$ uma aplicação tal que $d(f(x), f(y)) = kd(x,y)$, para todo $x, y \in M$, onde $k > 0$ (f aplicação *lipschitziana*). Prove que se M é completo, então $f(M)$ é completo.

5) Seja $M = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$. Mostre que:

   a) Se $d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$, então (M,d) é completo.

   b) Se $d_1(x,y) = |x - y|$, então (M, d_1) não é completo.

6) Determine o completamento dos seguintes espaços métricos:

a) $N =]1,3[\subseteq \mathbb{R}$.

b) $P = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\} \subseteq \mathbb{R}$.

c) $Q = \left\{(1,1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \ldots\right\}$ no plano $\mathbb{R}^2$.

7) Sobre o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}^*$ considere a métrica $d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$. Determine um completamento para $(\mathbb{N}^*, d)$.

8) Se (N, f) é um completamento de M, mostre que $f : M \to f(M) \subseteq N$ é um homeomorfismo uniforme.

9) Seja $E \subseteq \mathbb{R}^n$ enumerável. Mostre que $X = \mathbb{R}^n - E$ é denso em $\mathbb{R}^n$.

10) Prove que um subconjunto A é magro em um espaço topológico S se, e somente se, $S - \overline{A}$ é denso em S.

11) Prove que se M é magro, então todo subespaço de M é magro.

12) Prove que a reunião enumerável de conjuntos magros é um conjunto magro.

13) Sejam M e N espaço métricos com M completo e $f : M \to N$ contínua e aberta. Se $Y \subseteq N$ é magro, mostre que $(f^{-1}(Y))^\circ = \emptyset$. (*Sugestão*: use o Teorema de Baire.)

14) Mostre que ser Baire é propriedade topológica.

Capítulo 8

Espaços de Funções

"A intuição do matemático não é necessariamente de natureza espacial ou mental, como às vezes se supõe. Representa, antes, um certo conhecimento sobre o comportamento de objetos matemáticos. Pode ser ajudada por imagens das mais diferentes formas, mas principalmente pelo permanente trato com elas."

(Nicolas Bourbaki)

8.1 Introdução

Neste capítulo introduzimos as topologias da convergência pontual ou simples (denominada também topologia aberto-pontual), da convergência uniforme, da convergência uniforme nas partes compactas e a topologia compacta-aberta em espaço de funções.

A topologia da convergência pontual no conjunto de todas as aplicações de X em Y, denotado por $\mathfrak{F}(X,Y) = Y^X$, onde X é um conjunto e Y é um espaço topológico, é a topologia produto já vista. Para a topologia da convergência uniforme é necessário que Y seja um espaço métrico e, neste texto, a topologia é definida (inicialmente) sobre o espaço $\mathcal{B}(X,Y)$ das funções limitadas, pois nesse conjunto está bem definida a "métrica do sup". No conjunto $\mathfrak{F}(X,Y)$, com (Y,d) espaço métrico, não podemos considerar a métrica do sup (para obter a topologia da convergência uniforme), pois a mesma não fica bem definida. No entanto, conforme observamos abaixo (Observação 8.3.4), este problema pode ser contornado por considerar em $\mathfrak{F}(X,Y)$ uma métrica (usualmente referida como *métrica uniforme*), que restrita a $\mathcal{B}(X,Y)$ é uniformemente equivalente a métrica do sup. A topologia da convergência uniforme nas partes compactas é dada sobre $\mathfrak{F}(X,Y)$, onde X é um espaço topológico e Y é um espaço métrico, e a topologia compacto-aberta é definida em $\mathfrak{F}(X,Y)$, para X e Y espaços topológicos quaisquer.

8.2 A Topologia da Convergência Pontual ou Simples

Sejam X e Y conjuntos não vazios e $\mathfrak{F}(X,Y) = \{f : X \to Y : \ f \text{ é aplicação}\}$. Recordemos que, considerando a família $\{Y_x\}_{x\,\in L}$ tal que $Y_x = Y$, para todo $x \in X$ (vide Exemplo 1.9.3), tem-se

$$\prod_{x\in X} Y_x = \{f : X \to \bigcup Y_x = Y;\ f(x) \in Y_x = Y\} = \mathfrak{F}(X,\ Y).$$

Se Y é um espaço topológico (e assim $Y_x = Y$ é espaço topológico, para todo $x \in X$) podemos considerar em $\mathfrak{F}(X,Y)$ a topologia produto já vista. Neste contexto, as projeções do produto nos espaços coordenados, $p_x : \mathfrak{F}(X,Y) \to Y;\ f \mapsto p_x(f) = f(x)$, são as funções de *avaliação*, usualmente denotadas por:

$$e_x : \mathfrak{F}(X,Y) \to Y;\ f \mapsto f(x)$$

Exemplo 8.2.1. *Sejam* $X = Y = \mathbb{R}$ *e* $f,\ g,\ h \in \mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *dadas por* $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = \cos \pi x$ *e* $h(x) = \frac{1}{x^2+1}$. *Então tem-se, por exemplo,* $e_1(f) = f(1) = 2$, $e_1(g) = -1$ *e* $e_0(h) = 1$.

Sejam X um conjunto qualquer e (Y,σ) um espaço topológico. Recordemos que uma sub-base para a topologia produto em $\mathfrak{F}(X,Y) = \prod_{x\in X} Y_x$ é a família

$$\mathfrak{S} = \{p_x^{-1}(G_x) :\ x \in X,\ G_x \text{ aberto de } Y_x = Y,\ \forall x \in X\},$$

Se $x_0 \in X$ e G é um aberto de $Y_{x_0} = Y$, vamos denotar

$$V(x_0,G)\ =\ p_{x_0}^{-1}(G)\ =\ \{f \in \mathfrak{F}(X,Y) :\ f(x_0) \in G\},$$

onde $p_{x_0} = e_{x_0}$. Assim, o aberto sub-básico $V(x_0,G) = \{f \in \mathfrak{F}(X,Y) : f(x_0) \in G\}$ consiste de todas as aplicações em que a imagem de x_0 é um elemento de G.

A topologia produto, neste caso, é chamada de ***topologia aberto-pontual***.

Um aberto básico será do tipo

$$G = p_{x_1}^{-1}(G_1) \cap p_{x_2}^{-1}(G_2) \cap \ldots \cap p_{x_r}^{-1}(G_r)\ =$$

$$=\ V(x_1,G_1) \cap V(x_2,G_2) \cap \cdots \cap V(x_r,G_r)\ =\ \{f \in \mathfrak{F}(X,Y) : f(x_i) \in G_i,\ i = 1,2,...,r\},$$

com $x_1,x_2,...,x_r$ em X; $G_1,G_2,...,G_r$ abertos de Y e $r \in \mathbb{N}^*$.

Proposição 8.2.2. *Uma sequência de aplicações* $(f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots)$ *em* $\mathfrak{F}(X,Y)$ *converge para* $f \in \mathfrak{F}(X,Y)$ *na topologia aberto-pontual se, e somente se, para cada* $x \in X$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge para* $f(x)$ *em* Y (*i. é,* (f_n) *converge simplesmente para* f)).

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge para f em $\mathfrak{F}(X,Y)$ na topologia aberto-pontual. Dados $x \in X$ e G um aberto de Y tal que $f(x) \in G \subseteq Y = Y_x$ temos que mostrar que existe n_0 de modo que $f_n(x) \in G$, para todo $n > n_0$. Considere o aberto sub-básico $p_x^{-1}(G)$ de $\mathfrak{F}(X,Y)$. Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge para f em $\mathfrak{F}(X,Y) = \prod_{x\in X} Y_x$ e $f \in p_x^{-1}(G)$, visto que $p_x(f) = f(x) \in G$, existe n_0 de modo que $f_n \in p_x^{-1}(G)$, para todo $n > n_0$. Assim, $f_n(x) = p_x(f_n) \in G$, para todo $n > n_0$, como desejado.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que, para cada $x \in X$, a sequência $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge para $f(x)$. Temos que provar que a sequência (f_n) converge para f em $\mathfrak{F}(X,Y)$ (com a topologia aberto-pontual, isto é, na topologia produto). Seja V um aberto de $\mathfrak{F}(X,Y)$ com $f \in V$. Existe um elemento básico $B = p_{x_1}^{-1}(G_1) \cap p_{x_2}^{-1}(G_2) \cap \ldots \cap p_{x_r}^{-1}(G_r)$ tal que $f \in B \subseteq V$. Para cada $i = 1,\ldots,r$, como $f_n(x_i)$ converge para $f(x_i) \in G_i$, existe n_i tal que $f_n(x_i) \in G_i$, para todo $n > n_i$. Tome n_0 = $\max\{n_1,\ldots,n_r\}$. Então, para todo $n \geq n_0$, $f_n(x_i) \in G_i$, para $i = 1,\ldots,r$. Logo $f_n \in B = p_{x_1}^{-1}(G_1) \cap p_{x_2}^{-1}(G_2) \cap \ldots \cap p_{x_r}^{-1}(G_r) \subseteq V$, $\forall n > n_0$. □

Definição 8.2.3. *Em vista da Proposição 8.2.2, a topologia produto ou topologia aberto-pontual sobre $\mathfrak{F}(X,Y)$ é também chamada* ***topologia da convergência pontual*** *ou* **topologia da convergência simples** (*Munkres [20], Cap. 7, §46, p. 281*) *e vamos denotar tal topologia por σ_s.*

A topologia aberto-pontual é a topologia menos fina em relação à qual as projeções ou funções de avaliação $e_x : \mathfrak{F}(X,Y) \to Y$, para todo $x \in X$, são contínuas. Observemos que dado $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}(X,Y)$, $e_x(\mathfrak{U}) = \{e_x(f),\ f \in \mathfrak{U}\} = \{f(x) :\ f \in \mathfrak{U}\} \subseteq Y$, assim $y \in e_x(\mathfrak{U})$ se, e somente se, $y = f(x)$ para alguma aplicação $f \in \mathfrak{U}$.

Ainda, dado $f \in \mathfrak{U}$, para cada $x \in X$, $f(x) \in e_x(\mathfrak{U})$, donde segue que $\mathfrak{U} \subseteq \prod_{x\in X} e_x(\mathfrak{U}) = \{f : X \to \bigcup_{x\in X} e_x(\mathfrak{U});\ f(x) \in e_x(\mathfrak{U})\}$.

A seguir determinaremos os subconjuntos compactos de $\mathfrak{F}(X,Y)$.

Proposição 8.2.4. *Seja $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}(X,Y)$. Então $\mathfrak{U}$ é compacto na topologia aberto-pontual se:*

(i) *$\mathfrak{U}$ é fechado, e*

(ii) *para todo $x \in X$, o conjunto $\overline{\{f(x) : f \in \mathfrak{U}\}}$ (fecho de $e_x(\mathfrak{U})$) é compacto em Y.*

Se Y é um espaço de Hausdorff, a condição (de compacidade) é também, suficiente.

Demonstração. Suponhamos que $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}(X,Y)$ é fechado e $\overline{\{f(x) : f \in \mathfrak{U}\}}$ compacto em Y, para todo x em X. Como observamos, $\mathfrak{U} \subseteq \prod_{x\in X} e_x(\mathfrak{U})$ (todo subconjunto de um produto cartesiano está contido no produto cartesiano de suas projeções nos espaços coordenados). Assim,

$$\mathfrak{U} \subseteq \prod_{x\in X} e_x(\mathfrak{U}) \subseteq \prod_{x\in X} \overline{e_x(\mathfrak{U})} = \prod_{x\in X} \overline{\{f(x) : f \in \mathfrak{U}\}}.$$

Pelo Teorema de Tychonoff, $\prod_{x\in X} \overline{\{f(x) : f \in \mathfrak{U}\}}$ é compacto, dado que $\overline{\{f(x) : f \in \mathfrak{U}\}}$ é compacto, para cada $x \in X$. Como $\mathfrak{U}$ é fechado num compacto, segue que $\mathfrak{U}$ é compacto.

Suponhamos agora que Y seja um espaço de Hausdorff e que $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}(X,Y)$ seja compacto. Provemos que (i) e (ii) ocorre. Temos que $\mathfrak{F}(X,Y)$ é um espaço de Hausdorff, pois a propriedade de ser de Hausdorff é transferível para o produto. Logo $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}(X,Y)$ é um subconjunto compacto de um espaço de Hausdorff, assim é fechado. Também, para cada $x \in X$, a função $e_x : \mathfrak{F}(X,Y) \to Y$ é contínua, donde segue que $e_x(\mathfrak{U}) = \{f(x) :\ f \in \mathfrak{U}\}$ é compacto em Y, e como Y é de de Hausdorff, $e_x(\mathfrak{U})$ é fechado em Y. Logo $\overline{e_x(\mathfrak{U})} = e_x(\mathfrak{U})$ é compacto, o que conclui a prova. □

8.3 Topologia da Convergência Uniforme e Teorema de Ascoli

Sejam $X \neq \emptyset$ e (Y,d) um espaço métrico. Considere o subconjunto de $\mathfrak{F}(X,Y)$,

$$\mathcal{B}(X,Y) = \{f : X \to Y \ : \ f \text{ é limitada, isto é, } f(X) \text{ é um subconjunto limitado de } Y\},$$

e a função

$$\begin{array}{rcl} \rho : \mathcal{B}(X,Y) \times \mathcal{B}(X,Y) & \to & \mathbb{R}; \\ (f,g) & \mapsto & \rho(f,g) := \sup\{d(f(x),g(x)) : x \in X\}. \end{array}$$

Proposição 8.3.1. $(\mathcal{B}(X,Y),\rho)$ *é um espaço métrico.*

Demonstração. Exercício. □

Proposição 8.3.2. *No espaço métrico* $(\mathcal{B}(X,Y),\rho)$ *uma sequência* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge para* f *se, e somente se, a sequência* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge uniformemente para* f.

Demonstração. Se (f_n) converge para f em $\mathcal{B}(X,Y)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $n > n_0$ implica $\rho(f_n, f) < \varepsilon$. Mas,

$$\rho(f_n,f) < \varepsilon \ \Rightarrow \ \sup\{d(f_n(x),f(x)) : x \in X\} < \varepsilon \ \Rightarrow \ d(f_n(x),f(x)) < \varepsilon, \ \forall\, x \in X.$$

Logo a convergência é uniforme.

Reciprocamente, se $f_n \xrightarrow{u} f$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $n > n_0$ implica $d(f_n(x),f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $x \in X$, de modo que

$$n > n_0 \ \Rightarrow \ \sup\{d(f_n(x),f(x)) : x \in X\} \ \leq \ \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \ \Rightarrow \ \rho(f_n,f) < \varepsilon$$

e portanto (f_n) converge para f em $\mathcal{B}(X,Y)$. □

Definição 8.3.3. *Em vista da Proposição 8.3.2, a topologia dada pela métrica* ρ *sobre* $\mathcal{B}(X,Y)$ *é chamada* ***topologia da convergência uniforme*** *e será denotada por* σ_u.

Observação 8.3.4. *Em* $\mathfrak{F}(X,Y)$, *com* $X \neq \emptyset$ *e* (Y,d) *um espaço métrico, não podemos, em geral, considerar a métrica do sup, pois ela não está bem definida, já que dados* f *e* g *em* $\mathfrak{F}(X,Y)$, $\sup\{d(f(x),g(x)) : \ x \in X\}$ *pode não existir. Uma forma de contornar este problema é considerar em* $\mathfrak{F}(X,Y)$ *a métrica*

$$\widetilde{\rho}(f,g) := \sup\{\overline{d}(f(x),g(x)) : \ x \in X\},$$

onde $\overline{d} : Y \to Y$ *é a métrica em* Y*, definida por* $\overline{d}(y_1,y_2) = min\{d(y_1,y_2),1\}$ *(que é uniformemente equivalente a* d*). Pode-se mostrar que* $\widetilde{\rho}$ *é uma métrica em* $\mathfrak{F}(X,Y)$ *(referida como* ***métrica uniforme****); que* (Y,d) *completo implica* $(\mathfrak{F}(X,Y),\widetilde{\rho})$ *completo (vide Munkres [20], Cap.* 7, §43, *Teor. 43.5, p. 267) e que, em* $\mathcal{B}(X,Y)$, $\widetilde{\rho} = \overline{\rho}$, *onde* $\overline{\rho}(f,g) = min\{\rho(f,g),1\} = min\ \{\sup\{d(f(x),\ g(x)) :\ x \in X\},\ 1\}$. *Assim, em* $\mathcal{B}(X,Y)$, *como* $\overline{\rho}$ *é uniformemente equivalente a* ρ, *as topologias induzidas por* $\widetilde{\rho}_|$ ($\widetilde{\rho}$ *restrita a* $\mathcal{B}(X,Y)$) *e por* ρ *coincidem* ($\sigma_{\widetilde{\rho}_|} = \sigma_\rho$), *e uma sequência* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge para f na métrica* ρ *se, e somente se, converge para f na métrica* $\widetilde{\rho}_|$ ($\widetilde{\rho}$ *restrita a* $\mathcal{B}(X,Y)$). *Tem-se ainda que* $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ *é fechado em* $\mathfrak{F}(X,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^X$, *logo completo com as métricas* $\widetilde{\rho}_|$ *e* ρ (*Munkres* (*a first course*) *[19], Cap. 7, §7 − 1, Lema 1.5, p. 268) e mais geralmente,* $\mathcal{B}(X,Y)$ *é completo se Y é completo* (*Munkres [20], Cap. 7, §43, Teor. 43.6, p. 267*).

Por um abuso vamos denotar também por σ_u *a topologia, em* $\mathfrak{F}(X,Y)$, *dada pela métrica* $\widetilde{\rho}$.

O espaço das aplicações contínuas: Sejam X e Y espaços topológicos e $\mathcal{C}(X,Y)$ o conjunto das aplicações continuas de X em Y. Se X é compacto e (Y,d) é um espaço métrico então $\mathcal{C}(X,Y)$ está contido em $\mathcal{B}(X,Y)$ (uma vez que a imagem de um compacto por uma aplicação contínua será um compacto no espaço métrico Y e, consequentemente, um conjunto limitado), assim para X compacto e Y um espaço métrico $\mathcal{C}(X,Y)$ pode ser visto como um subespaço do espaço métrico $(\mathcal{B}(X,Y),\rho)$ e podemos considerar em $\mathcal{C}(X,Y)$ a topologia da convergência uniforme.

Na sequência vamos apresentar alguns resultados relativos ao espaço $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, usualmente denotado por $\mathcal{C}([0,1])$ (dentre eles o *Teorema de Ascoli*) e finalizamos com o Teorema de Ascoli em $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^n)$, para X um espaço topológico compacto (*Teorema de Ascoli - Versão Clássica*). O leitor interessado, mais especificamente nesse último resultado, pode ir direto para o mesmo, uma vez que o anterior é um caso particular.

$\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ é um espaço vetorial normado com a norma

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|\ :\ x \in [0,1]\}$$

que induz em $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ a métrica ρ do sup, referida acima, considerando d a métrica usual em $\mathbb{R}$

$$\rho(f,g) = \sup\{d(f(x),g(x)) :\ x \in [0,1]\} = \sup\{|f(x) - g(x)| :\ x \in [0,1]\} = \|f - g\|.$$

Tal espaço é de fundamental importância na Análise Matemática. Toda $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ é uniformemente contínua (já que $[0,1]$ é compacto - Proposição 4.4.14) e $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}([0,1],\mathbb{R})$.

Proposição 8.3.5. *$\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ é um espaço métrico completo com a métrica* $\rho(f,g) = \sup\{d(f(x),g(x))) :\ x \in [0,1]\}$.

Demonstração. Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Para cada $x \in [0,1]$, temos $d(f_m(x),f_n(x)) \leq \rho(f_m,f_n)$ e portanto, $(f_1(x),f_2(x),...,f_n(x),...)$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ é completo existe, para cada $x \in [0,1]$, o limite $f(x) = lim f_n(x) \in \mathbb{R}$.

Provemos que f_n converge para f (em $\mathcal{B}([0,1],\mathbb{R})$). Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, como (f_n) é de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $m,\ n > n_0$ implica $\rho(f_m,f_n) < \varepsilon/2$ e portanto $d(f_m(x),f_n(x)) < \varepsilon/2$, para todo $x \in [0,1]$. Assim, se $n > n_0$, $\rho(f,f_n) = lim\ \rho(f_m,f_n)) \leq \varepsilon/2$, para qualquer

$x \in [0,1]$. Logo $\rho(f, f_n) < \varepsilon$, para todo $n > n_0$, ou seja f_n converge para f (e portanto converge uniformemente). Agora, como cada f_n é contínua, segue da Proposição 6.5.6, que f é contínua, assim $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ e f_n converge para f em $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, como queríamos provar. $\square$

Observação 8.3.6. *De maneira similar ao que foi feito na proposição anterior pode-se mostrar o seguinte resultado: "Se X é um espaço topológico compacto e Y é um espaço métrico completo então $\mathcal{C}(X,Y)$ é completo (com a métrica ρ)".*

Definição 8.3.7. *Seja X um conjunto. Um subconjunto $\mathfrak{U}$ do conjunto $\mathfrak{F}(X,\mathbb{R})$, das funções reais definidas sobre X, é* ***uniformemente limitado*** *se existe um número real positivo k tal que $|f(x)| \leq k$, para toda função $f \in \mathfrak{U}$ e todo $x \in X$.*

Proposição 8.3.8. *Seja $\mathfrak{U} \subseteq \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. São equivalentes as seguintes afirmações:*

(i) $\mathfrak{U} \subseteq \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ *é uniformemente limitado;*

(ii) *existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\|f\| = sup\{|f(x)| \, : \, x \in [0,1]\} \leq k$, para todo $f \in \mathfrak{U}$;*

(iii) $\mathfrak{U}$ *é um subconjunto limitado do espaço métrico $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.*

Demonstração. A demonstração é simples e é deixada a cargo do leitor. $\square$

Definição 8.3.9. *Seja (X,d) um espaço métrico. Um conjunto $\mathfrak{U}$ de funções reais, $\mathfrak{U} = \{f_i : X \to \mathbb{R} : i \in \Lambda\} \subseteq \mathfrak{F}(X,\mathbb{R})$, diz-se* ***equicontínuo em*** *$x_0 \in X$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x,x_0) < \delta$ implica $|f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon$, para toda $f_i \in \mathfrak{U}$. Diz-se que $\mathfrak{U}$ é* ***equicontínuo*** *(ou que a família $\mathfrak{U} = \{f_i : X \to \mathbb{R} : \, i \in \Lambda\}$ é equicontínua) se para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x,x') < \delta$ $(x,x' \in X)$ implica $|f_i(x) - f_i(x'))| < \varepsilon$, para toda toda $f_i \in \mathfrak{U}$.*

Observação 8.3.10. *i) Quando $\mathfrak{U}$ é equicontínuo δ depende somente de ε e não depende de qualquer ponto de X ou função de $\mathfrak{U}$, e as funções de $\mathfrak{U}$ são uniformemente contínuas.*

ii) Alguns autores, como Lima [14] (Cap. 9, §6, p. 263) definem conjunto equicontínuo $\mathfrak{U}$ como um conjunto que é equicontínuo em x_0, para todo $x_0 \in X$, e o conjunto equicontínuo que apresentamos é referido como conjunto "uniformemente equicontínuo". No entanto, quando X é um espaço métrico compacto (que é o caso de interesse) pode-se provar que todo conjunto $\mathfrak{U}$ equicontínuo é uniformemente equicontínuo (vide Lima [14], Cap. 9, §6, Corol. p. 266). Ou seja, quando X é métrico compacto as duas definições coincidem. Disso segue, por exemplo, que todo $\mathfrak{U} \subseteq \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ equicontínuo (de acordo com a definição dada por esses outros autores) é uniformemente equicontínuo (ou seja, é equicontínuo de acordo com a definição aqui considerada).

Proposição 8.3.11. (Teorema de Ascoli - em $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$) *Seja $\mathfrak{U}$ um subconjunto do espaço $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ das funções continuas. Então $\mathfrak{U}$ é compacto se, e somente se, $\mathfrak{U}$ é fechado, uniformemente limitado e equicontínuo.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Como $\mathfrak{U} \subseteq \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ é compacto, então (vide Corolário 4.4.5) $\mathfrak{U}$ é um subconjunto fechado e limitado do espaço métrico $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\rho)$ e assim, pela proposição anterior, $\mathfrak{U}$ é uniformemente limitado. Resta provar que $\mathfrak{U}$ é equicontínuo. Dado $\varepsilon > 0$, como $\mathfrak{U}$ é totalmente limitado (uma vez que compacto implica em totalmente limitado, Proposição 4.4.4) existe uma $\frac{\varepsilon}{3}$ - rede finita, $B = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ em $\mathfrak{U}$ e então, para cada $f \in \mathfrak{U}$, existe $f_{i_0} \in B$ $(i_0 = 1,2,...,n)$ tal que $f \in B_\rho(f_{i_0}, \frac{\varepsilon}{3})$, ou seja

$$\|f - f_{i_0}\| \;=\; \sup\{|f(x) - f_{i_0}(x)| \;:\; x \in [0,1]\} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Logo, para todos $x, x' \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x')| \;&=\; |f(x) - f_{i_0}(x) + f_{i_0}(x) - f_{i_0}(x') + f_{i_0}(x') - f(x')| \\
&\leq\; |f(x) - f_{i_0}(x)| \;+\; |f_{i_0}(x) - f_{i_0}(x')| \;+\; |f_{i_0}(x') - f(x')| \\
&<\; \frac{\varepsilon}{3} \;+\; |f_{i_0}(x) - f_{i_0}(x')| \;+\; \frac{\varepsilon}{3} \;=\; |f_{i_0}(x) - f_{i_0}(x')| + \frac{2\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Como cada $f_i \in B$ é uniformemente contínua, existe $\delta_i > 0$ tal que $|x - x'| < \delta_i$ implica $|f_i(x) - f_i(x')| < \frac{\varepsilon}{3}$. Fazendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$, temos, para todo $f \in \mathfrak{U}$,

$$|x - x'| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x')| \;\leq\; |f_{i_0}(x) - f_{i_0}(x')| \;+\; \frac{2\varepsilon}{3} \;<\; \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} \;=\; \varepsilon.$$

Portanto $\mathfrak{U}$ é equicontínuo.

$(\Leftarrow)$ Dado que $\mathfrak{U}$ é fechado do espaço completo $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $\mathfrak{U}$ é completo, e para concluir que $\mathfrak{U}$ é compacto basta demonstrar (vide Exercício 7.3.1-1) que $\mathfrak{U}$ é totalmente limitado. Vamos provar então que $\mathfrak{U}$ é totalmente limitado. Seja $\varepsilon > 0$, como $\mathfrak{U}$ é equicontínuo, existe $\delta > 0$, e portanto, $n_0 \in \mathbb{N}^*$ com $\frac{1}{n_0} < \delta$, tal que

$$|a - b| < \frac{1}{n_0} \;\;\Rightarrow\;\; |f(a) - f(b)| < \frac{\varepsilon}{5}, \;\; \forall\, f \in \mathfrak{U}.$$

Asserção: Dados $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ e $\varepsilon > 0$, existem $n_0 \in \mathbb{N}^*$ e pontos $p_i = (x_i, y_i)$, $i = 0,1,...,n_0$, dados por $p_0 = \left(0, \frac{\varepsilon.k_0}{5}\right), \ldots, p_i = \left(\frac{i}{n_0}, \frac{\varepsilon.k_i}{5}\right), \ldots, p_{n_0} = \left(1, \frac{\varepsilon.k_{n_0}}{5}\right)$, com $k_0, k_1, \ldots, k_{n_0}$ inteiros, tais que se $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ é a poligonal ligando os pontos p_i (isto é, g restrita a cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ é uma função afim com $g(x_i) = y_i$ e $g(x_{i+1}) = y_{i+1}$) então $\|f - g\| < \varepsilon$.

Prova da *Asserção*: Como toda $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ é uniformemente contínua, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $|a - b| \leqslant \frac{1}{n_0}$ implica $|f(a) - f(b)| < \frac{\varepsilon}{5}$. Seja

$$A = \left\{(x,y) \in I \times \mathbb{R} : \; x = \frac{i}{n_0}, \;\; y = \frac{k\varepsilon}{5} \;\text{ onde }\; i = 0,1,\ldots,n_0 \;\text{ e }\; k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Escolha $p_i = (x_i, y_i) \in A$ $(x_i = \frac{i}{n_0}, y_i = \frac{k_i\varepsilon}{5})$ tal que $y_i \leq f(x_i) \leq y_i + \frac{\varepsilon}{5}$, $i = 0, 1, ..., n_0$. Considere $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ a poligonal ligando os pontos p_i (logo $g(x_i) = y_i$). Então $|f(x_i) - g(x_i)| = |f(x_i) - y_i| < \frac{\varepsilon}{5}$ e $|f(x_i) - f(x_{i+1})| < \frac{\varepsilon}{5}$, pois $|x_i - x_{i+1}| = \frac{1}{n_0}$. Também

$$|g(x_i) - g(x_{i+1})| \leq |g(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x_{i+1})| + |f(x_{i+1}) - g(x_{i+1})| < \frac{3\varepsilon}{5}.$$

Visto que g é linear entre x_i e x_{i+1}, temos

$$x_i \leq z \leq x_{i+1} \Rightarrow |g(x_i) - g(z)| \leq |g(x_i) - g(x_{i+1})| < \frac{3\varepsilon}{5}.$$

Assim, como para todo $z \in I$ existe x_r tal que $x_r \leq z \leq x_{r+1}$, segue que

$$|f(z) - g(z)| \leq |f(z) - f(x_r)| + |f(x_r) - g(x_r)| + |g(x_r) - g(z)| < \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{3\varepsilon}{5} = \varepsilon \Rightarrow \|f - g\| < \varepsilon,$$

o que demonstra a *asserção*.

Retomando a demonstração da proposição, dado $\varepsilon > 0$, para cada $f \in \mathfrak{U}$, seja g_f a poligonal ligando pontos de $A = \left\{(x,y) : x = 0, \frac{1}{n_0}, \frac{2}{n_0}, \ldots, 1; y = \frac{k\varepsilon}{5}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ com $\|f - g_f\| < \varepsilon$ (cuja existência foi mostrada na asserção anterior). Afirmamos que o conjunto $\mathbb{B} = \{g_f : f \in \mathfrak{U}\}$ é finito. Com efeito, como $\mathfrak{U}$ é uniformemente limitado, segue que $\mathbb{B}$ é uniformemente limitado. Assim, existe $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ tal que $|g_f(x)| \leq c$, para todo $x \in [0,1]$. Em particular, $|g_f(x_i)| \leq c$, para todo $x_i \in [0,1]$, x_i coordenadas dos pontos p_i em A. Assim, $|g_f(x_i)| = \frac{k_i\varepsilon}{5} \leq c$, com k_i inteiro. E como c é uma constante fixa, segue que há apenas um número finito de possibilidades para os valores k_i. Consequentemente, existe um número finito de funções distintas em $\mathbb{B}$ (existe somente um número finito de pontos de A que aparecem nas poligonais de $\mathbb{B}$, isto é, só pode haver um número finito de arcos em $\mathbb{B}$). Assim $\mathbb{B}$ é um conjunto finito, digamos $\mathbb{B} = \{g_1, g_2, ..., g_r\}$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$ obtemos uma ε-rede finita $\mathbb{B}$ para $\mathfrak{U}$ (visto que para cada $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ existe $g_i \in \mathbb{B}$ tal que $\|f - g_i\| < \varepsilon$) e portanto $\mathfrak{U}$ é totalmente limitado. □

Observação 8.3.12. $i)$ *O Teorema de Ascoli é também referido, às vezes, como Teorema de Arzela - Ascoli.*

$ii)$ *Na sequência apresentamos o Teorema de Ascoli em $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$, para X um espaço topológico compacto (e $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ com a métrica ρ do supremo), referido como "Teorema de Ascoli - versão clássica". Para tanto apresentamos, inicialmente, a definição de conjunto equicontínuo para espaços mais gerais, ou seja para subconjuntos de $\mathfrak{F}(X,Y)$, com X um espaço topológico qualquer e Y um espaço métrico. Notemos que a definição seguinte está de acordo com Munkres (a first course) [19] (Cap. 7, §7 − 3, p. 276), Munkres [20] (Cap. 7, §45, p. 276) e Lima [14] (Cap. 9, §6, p. 263), e é coerente com a apresentada anteriormente se consideramos X um espaço métrico compacto (vide Observação 8.3.10).*

Definição 8.3.13. *Sejam X um espaço topológico, (Y,d) um espaço métrico e $x_0 \in X$. Um subconjunto $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{F}(X,Y)$ é* ***equicontínuo em*** *x_0 se, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança V de x_0 em X tal que $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, $\forall x \in V$ e $\forall f \in \mathfrak{U}$. Diz-se que o subconjunto $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}(X,Y)$ é* ***equicontínuo*** *se $\mathfrak{U}$ é equicontínuo em x_0 para todo $x_0 \in X$.*

Observação 8.3.14. *i) Se $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}(X,Y)$ é equicontínuo em $x_0 \in X$ então f é uma aplicação contínua em x_0, para toda $f \in \mathfrak{U}$. Logo, ao considerarmos $\mathfrak{U}$ equicontínuo, podemos sempre supor $\mathfrak{U} \subseteq \mathcal{C}(X,Y)$.*

ii) Se $\mathfrak{U}$ é equicontínuo em x_0 então $\mathfrak{U}_1$ também é equicontínuo em x_0 para todo $\mathfrak{U}_1 \subseteq \mathfrak{U}$.

iii) Todo conjunto finito $\mathfrak{U} = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\} \subseteq \mathcal{C}(X,Y)$ é equicontínuo (Exercício).

Para a prova do Teorema de Ascoli - versão clássica, precisamos de dois lemas (cujas provas serão apresentadas posteriormente). O enunciado do teorema e a prova apresentada aqui seguem Munkres (a *first course*) [19] (Cap. 7, §7-3, Teor. 3.3, p. 277). Em Munkres [20], o teorema é apresentado com enunciado um pouco diferente.

Lema 8.3.15. (Lema 1) *Seja X um espaço topológico compacto e (Y,d) um espaço métrico compacto. Então $\mathfrak{U} \subseteq \mathrm{C}(X,Y)$ é equicontínuo se, e somente se $\mathfrak{U}$ é totalmente limitado na métrica* ρ *do supremo.*

Lema 8.3.16. (Lema 2) *Dado X um espaço topológico, se X é compacto e $\mathfrak{U} \subseteq \mathcal{C}(X,\mathbb{R}^n)$ é limitado na métrica ρ do supremo então existe $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, Y compacto, com a propriedade de que $f(X) \subseteq Y$, $\forall f \in \mathfrak{U}$ e $\forall x \in X$ (e consequentemente, $\mathfrak{U} \subseteq \mathcal{C}(X,Y) \subseteq \mathcal{C}(X,\mathbb{R}^n)$).*

Teorema 8.3.17. (Teorema de Ascoli - Versão Clássica)*: Seja X um espaço topológico compacto e considere $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{B}(X,\mathbb{R}^n)$ com a métrica* ρ *do sup. Um subconjunto $\mathfrak{U}$ de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^n)$ é compacto se, e somente se é fechado, limitado e equicontínuo.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Por hipótese $\mathfrak{U}$ é um compacto do espaço métrico $(\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^n), \rho)$ com a métrica ρ do supremo. Logo $\mathfrak{U}$ é fechado e limitado. Pelo Lema 2, existe $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, Y (métrico) compacto tal que $\mathfrak{U} \subseteq \mathcal{C}(X,Y) \subseteq \mathcal{C}(X,\mathbb{R}^n)$. Ainda, como $\mathfrak{U}$ é compacto, segue que $\mathfrak{U}$ é totalmente limitado. Logo, usando que $\mathfrak{U}$ é totalmente limitado e, X e Y são compactos conclui-se, do Lema 1, que $\mathfrak{U}$ é equicontínuo. Assim, $\mathfrak{U}$ é fechado, limitado e equicontínuo.
($\Leftarrow$) Pela hipótese $\mathfrak{U} \subseteq \mathcal{C}(X,\mathbb{R}^n)$ é fechado, limitado e equicontínuo. Como X é compacto e $\mathbb{R}^n$ é completo, tem-se (vide Observação 8.3.6) que $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^n)$ é completo (com a métrica ρ). Logo $\mathfrak{U}$ é completo, visto que fechado em completo é completo. Agora, $\mathfrak{U} \subseteq \mathcal{C}(X,\mathbb{R}^n)$ limitado implica, pelo Lema 2, que existe $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, Y compacto tal que $\mathfrak{U} \subseteq \mathcal{C}(X,Y)$. Usando que $\mathfrak{U}$ é equicontínuo (hipótese) segue, do Lema 1, que $\mathfrak{U}$ é totalmente limitado. Finalmente, usando que um espaço métrico é compacto se, e somente se é completo e totalmente limitado (Exercício 7.3.1 - 1) obtém-se que $\mathfrak{U}$ é compacto. $\square$

Vejamos as demonstrações dos dois lemas anteriormente citados.

Demonstração. (Lema 8.3.15 - Lema 1) ($\Rightarrow$) A prova desta implicação é a mais longa. Considere $\mathfrak{U} \subseteq \mathcal{C}(X,Y)$ equicontínuo. Então, dado $\varepsilon > 0$, para cada $x_0 \in X$ existe $V_{x_0} \subseteq X$ aberto tal que $x_0 \in V_{x_0}$ e $d(f(x), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$, para todo $x \in V_{x_0}$ e toda $f \in \mathfrak{U}$. Logo $\{V_{x_0}, x_0 \in X\}$ é uma cobertura aberta de X e, uma vez que X é compacto, segue que existem $x_1, \cdots, x_n \in X$ tais que

$$X = V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n} \quad \text{e} \quad d(f(x), f(x_i)) < \tfrac{\varepsilon}{3},\ \forall x \in V_{x_i} \ \text{e}\ \forall f \in \mathfrak{U}.$$

Como (Y,d) é métrico compacto, (Y,d) é totalmente limitado. Assim, para $\frac{\varepsilon}{6}$ existem $y_1, \ldots, y_r \in Y$ tais que $Y = B(y_1, \frac{\varepsilon}{6}) \cup \cdots \cup B(y_r, \frac{\varepsilon}{6})$. Considere

$$J = \{\varphi : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, r\};\ \varphi \text{ é uma aplicação}\}.$$

Para $\varphi \in J$, se existir alguma aplicação $f \in \mathfrak{U}$ tal que $f(x_i) \in B_{\varphi(i)} := B(y_{\varphi(i)}, \frac{\varepsilon}{6})$ escolhemos uma destas aplicações e a rotulamos de f_φ. Assim, $f_\varphi(x_i) \in B_{\varphi(i)}$ e portanto $d(f_\varphi(x_i), y_{\varphi(i)}) < \frac{\varepsilon}{6}$. A família $f_\varphi \subseteq \mathfrak{U}$ anteriormente obtida está indexada em um subconjunto $J_1 \subseteq J$ e é finita visto que J é finito ($\#J = r^n$). Mostremos que $\mathfrak{U} \subseteq \bigcup_{\varphi \in J_1} B_\rho(f_\varphi, \varepsilon)$ e portanto $\mathfrak{U}$ é totalmente limitado. De fato, dado $f \in \mathfrak{U}$, $f(x_i) \in Y = \bigcup_{k=1}^{r} B(y_k, \frac{\varepsilon}{6})$, para $i = 1, \cdots n$. Assim, $f(x_1) \in B(y_{k_1}, \frac{\varepsilon}{6})$, para algum $k_1 \in \{1, \cdots, r\}$; $\cdots$; $f(x_n) \in B(y_{k_n}, \frac{\varepsilon}{6})$, para algum $k_n \in \{1, \cdots, r\}$. Tome

$$\varphi : \{1,2,...,n\} \to \{1,2,...,r\},\ \text{definida por}\ \varphi(i) = k_i.$$

Então $f(x_i) \in B_{\varphi(i)}$ e $\varphi \in J_1$. Seja $f_\varphi \in \mathfrak{U}$ a aplicação associada a φ (que foi escolhida/fixada e que não necessariamente é a f). Verifiquemos que $f \in B_\rho(f_\varphi, \varepsilon)$, isto é, $\rho(f, f_\varphi) < \varepsilon$. Para cada $x \in X$, $x \in V_{x_i}$ para algum i, e como f e f_φ pertencem a $\mathfrak{U}$, tem-se $d(f(x), f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}$ e $d(f_\varphi(x), f_\varphi(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Por outro lado, uma vez que $f(x_i)$ e $f_\varphi(x_i)$ pertencem a $B_{\varphi(i)}$ obtemos que

$$d(f(x_i), f_\varphi(x_i)) \ \leq\ d(f(x_i), y_{\varphi(i)}) + d(y_{\varphi(i)}, f_\varphi(x_i)) \ <\ \tfrac{\varepsilon}{6} + \tfrac{\varepsilon}{6} \ =\ \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Logo

$$d(f(x), f_\varphi(x)) \ \leq\ d(f(x), f(x_i)) + d(f(x_i), f_\varphi(x_i)) + d(f_\varphi(x_i), f_\varphi(x)) \ <\ \varepsilon,\ \forall x \in X.$$

Daí,

$$\rho(f, f_\varphi) \ =\ sup\{d(f(x), f_\varphi(x)), x \in X\} \ =\ max\{d(f(x), f_\varphi(x)), x \in X\} < \varepsilon$$

e $f \in B_\rho(f_\varphi, \varepsilon)$, como queríamos provar.

($\Leftarrow$) Suponhamos $\mathfrak{U}$ totalmente limitado. Dado $x_0 \in X$ mostraremos que $\mathfrak{U}$ é equicontínuo em x_0, $\forall x_0 \in X$. Seja $\varepsilon > 0$. Como $\mathfrak{U}$ é totalmente limitado existem $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{C}(X,Y)$ tais que

$$\mathfrak{U} \ \subseteq\ \bigcup_{i=1,\ \ldots,\ n} B_\rho(f_i, \tfrac{\varepsilon}{3}) \qquad (1)$$

Uma vez que cada f_i é contínua (em x_0) existe um aberto V de X tal que $x_0 \in V$ e $d(f_i(x), f_i(x_0) < \frac{\varepsilon}{3}$, para quaisquer $x \in V$ e $i = 1, \cdots, n$. Dado $f \in \mathfrak{U}$, segue de (1) que $f \in B_\rho(f_i, \frac{\varepsilon}{3})$ para algum i. Tem então que

$$d(f(x), f(x_0)) \ \leq\ d(f(x), f_i(x)) \ +\ d(f_i(x), f_i(x_0)) \ +\ d(f_i(x_0), f(x_0)) \ < \varepsilon,\ \forall x \in V.$$

Como tomamos uma aplicação qualquer $f \in \mathfrak{U}$, segue que $d(f(x), f(x_0)) \ <\ \varepsilon$, $\forall x \in V$ e $\forall f \in \mathfrak{U}$, e assim $\mathfrak{U}$ é equicontínuo. $\square$

Demonstração. (Lema 8.3.16 - Lema 2) Seja $f_0 \in \mathfrak{U} \subseteq \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$. Como por hipótese $\mathfrak{U}$ é limitado com a métrica ρ, existe $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ tal que $\rho(f_0, f) < c$, $\forall f \in \mathfrak{U}$. Uma vez que X é compacto,

$f_0(X) \subseteq \mathbb{R}^n$ também é compacto, logo limitado. Assim existe $k > 0$ tal que $f_0(X) \subseteq B_d(0,k)$, sendo d a métrica usual em $\mathbb{R}^n$. Consequentemente, dados $f \in \mathfrak{U}$ e $x \in X$,

$$d(f(x),0) \;\leq\; d(f(x),f_0(x)) + d(f_0(x),0) \;\leq\; \rho(f,f_0)+k \;<\; c+k,$$

de modo que $f(X) \subseteq B(0,c+k) \subseteq \mathbb{R}^n$. Tome então $Y = \overline{B(0,c+k)} \subseteq \mathbb{R}^n$. Então Y é compacto (pois é fechado e limitado no $\mathbb{R}^n$) e $f(x) \in Y$, para todos $x \in X$ e $f \in \mathfrak{U}$. $\square$

Observação 8.3.18. *Existem outras versões do Teorema de Ascoli/Arzela, por exemplo:*

1. Teorema de Arzela (*ou Arzela-Ascoli*)*:* Sejam X um espaço topológico compacto e $f_n \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$, uma família de aplicações. Se $\mathfrak{U} = \{f_n,\ n \geq 1\}$ é equicontínuo e *pontualmente limitado* (isto é, para cada $x \in X$, o conjunto $\mathfrak{U}_x = \{f_n(x) : n \geq 1\}$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$), então a sequência (f_n) tem uma subsequência uniformemente convergente. (Munkres (*a first course*) [*19*], *Cap. 7, §7-3, Exerc. 5 - d, p. 279.*)

2. Teorema de Ascoli (versão generalizada)*:* Sejam X um espaço topológico Hausdorff, localmente compacto e (Y,d) um espaço métrico. Considere em $\mathcal{C}(X,Y)$ a topologia compacto-aberta (vide §8.5 abaixo). Um subconjunto $\mathfrak{U}$ de $\mathcal{C}(X,Y)$ tem fecho compacto se, e somente se, é equicontínuo e o subconjunto $\mathfrak{U}_x = \{f(x) : f \in \mathfrak{U}\} = e_x(\mathfrak{U})$, de Y, tem fecho compacto para cada x. (Munkres (*a first course*) [19], Cap. 7, §7-3, Teor. 6.1, p. 290.)

8.3.1 Exercícios

1) Mostre que a sequência (f_n) em $\mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, tal que

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}|x|, & \text{se } |x| \leq n \\ 0, & \text{se } |x| \geq n, \end{cases}$$

converge pontualmente, mas não uniformemente para a função constante $g(x) \equiv 1$. (Lipschutz [17], Cap. 15, Exemplo 4.2, p. 269.)

2) Sejam $X \neq \emptyset$ e Y um espaço topológico. Verifique que se Y é T_1, T_2, regular ou conexo, então $\mathfrak{F}(X,Y)$ com a topologia da convergência pontual também goza desta propriedade.

3) Seja $m \in \mathbb{N}^*$ e considere $A_m \subseteq \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, constituido das funções $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tais que existe $x_0 \in \left[0, 1-\frac{1}{m}\right]$ com

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right| \leq m, \quad \forall\, h \in \left]0, \frac{1}{m}\right[.$$

Mostre que:

a) A_m é subconjunto fechado de $\mathcal{C}([0,1])$.

b) A_m é magro em $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

c) $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \;\neq\; \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$.

d) Existe uma função contínua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ que não é diferenciável em ponto algum de $[0,1]$. (Lipschutz [17], Cap. 15, Probl. 13 a 16, p. 279-280.)

4) No espaço $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ das funções contínuas (e limitadas) de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$ com a métrica do sup, $\rho(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$, considere a sequência (f_n) dada por $f_n(x) = x^n$.

a) Mostre que para todo $x \in]0,1[$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

b) Mostre que a sequência $(f_n)_{n\in N^*}$ não converge para a função nula.

c) Conclua que (f_n) não é uma sequência de Cauchy.

d) Mostre que o conjunto $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) : \|f\| \leq 1\}$ é fechado e limitado mas não é compacto.

5) Dê um exemplo de uma sequência de funções contínuas $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que, para cada $x \in [0,1]$ se tenha $\lim f_n(x) = 0$ e f_n não converge para a função nula em $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. A sequência (f_n) obtida é de Cauchy em $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$? Justifique. (*Sugestão*: Lipschutz [17], Cap. 15, Problemas, p. 274.)

6) Considerando a sequência de funções em $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, definida por $f_n(x) = nx$ para $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ e $f_n(x) = 1$ para $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$, mostre que $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ não é localmente compacto. (Simmons [22], Cap. 4, §25, Probl. 4, p. 128.)

8.4 Topologia da convergência compacta ou da convergência uniforme nas partes compactas

Sejam X um espaço topológico e (Y,d) um espaço métrico. Dados $f \in \mathfrak{F}(X,Y) = Y^X$, $K \subseteq X$, K compacto e $\varepsilon > 0$, define-se

$$B_K(f,\varepsilon) := \{g \in \mathfrak{F}(X,Y) : \; sup\{d(f(x),g(x)),\; x \in K\} < \varepsilon\}.$$

Proposição 8.4.1. *Nas condições acima, tem-se:*

(i) *Para* $K = \{x_0\} \subseteq X$, $f \in B_K(f,\varepsilon) = \{g \in \mathfrak{F}(X,Y) \; ; \; g(x_0) \in B_d(f(x_0),\varepsilon)\}$.

(ii) $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ *implica* $B_K(f,\varepsilon_1) \subseteq B_K(f,\varepsilon_2)$.

(iii) $K_1 \subseteq K_2$ *implica* $B_{K_2}(f,\varepsilon) \subseteq B_{K_1}(f,\varepsilon)$.

(vi) *Dado* $h \in B_K(f,\varepsilon)$ *existe* $\delta = \varepsilon$ - $sup\{d(f(x),h(x));\; x \in K\}$ *de modo que* $B_K(h,\delta) \subseteq B_K(f,\varepsilon)$.

(v) *Dado* $h \in B_{K_1}(f,\varepsilon_1) \cap B_{K_2}(g,\varepsilon_2)$, *existe* $\delta > 0$ *e* $K = K_1 \cup K_2$ *compacto, tal que*

$$B_K(h,\delta) \subseteq B_{K_1}(f,\varepsilon_1) \cap B_{K_2}(g,\varepsilon_2).$$

(vi) *O conjunto* $\mathfrak{B} = \{B_K(f,\varepsilon) : f \in \mathfrak{F}(X,Y),\ K \subseteq X,\ K \text{ compacto e } \varepsilon > 0\}$ *forma uma base para uma topologia em* $\mathfrak{F}(X,Y)$.

Demonstração. Exercício. □

Definição 8.4.2. *A topologia em* $\mathfrak{F}(X,Y)$ *obtida na proposição anterior é chamada* ***topologia da convergência compacta*** *ou da* ***convergência uniforme nas partes compactas****. Denotaremos tal topologia por* σ_c.

A definição acima é motivada pela proposição (e definição) seguinte.

Definição 8.4.3. *Seja* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *uma sequência de aplicações de um espaço topológico* (X,σ) *em um espaço métrico* (Y,d). *Diz-se que a sequência* ***converge uniformemente nas partes compactas*** *para uma aplicação* $f : X \to Y$ *se, para todo conjunto compacto* $K \subseteq X$ *e para todo* $\varepsilon > 0$, *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > n_0$ *implica* $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$, *para todo* $x \in K$. *Em outras palavras,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge uniformemente nas partes compactas para* f *se, e somente se, para todo subconjunto compacto* $K \subseteq X$ *a sequência das restrições de* f_n *a* K *converge uniformemente para a restrição de* f *a* K, *i.é,* $(f_{n|K}) \xrightarrow{u} f_{|K}$.

Proposição 8.4.4. *Sejam* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *uma sequência de aplicações de um espaço topológico* (X,σ) *em um espaço métrico* (Y,d) *e* $f : X \to Y$ *uma aplicação. Então* $(f_n) \to f$ *em* $(\mathfrak{F}(X,Y),\sigma_c)$, *se e somente se, a sequência* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge uniformemente nas partes compactas para* f.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que $(f_n) \to f$ em $(\mathfrak{F}(X,Y),\sigma_c)$. Queremos mostrar que $(f_{n|K}) \xrightarrow{u} f_{|K}$, para todo compacto K em X. Sejam $\varepsilon > 0$ e K um compacto em X. Como $f \in B_K(f,\varepsilon) \in \sigma_c$ e $(f_n) \to f$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$, tal que $f_n \in B_K(f,\varepsilon)$, para todo $n \geq n_0$. Daí $d(f(x), f_n(x)) \leq \sup\{d(f(x'), f_n(x')) : x' \in K\} < \varepsilon$, $\forall x \in K$ e $n \geq n_0 \in \mathbb{N}^*$, e portanto $(f_{n|K}) \xrightarrow{u} f_{|K}$.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que $(f_{n|K}) \xrightarrow{u} f_{|K}$, para todo compacto $K \subseteq X$. Seja $\mathcal{G} \in \sigma_c$ com $f \in \mathcal{G}$, existe um aberto básico $B_{K_1}(f,\varepsilon) \subseteq \mathcal{G}$. Como $(f_{n|K_1}) \xrightarrow{u} f_{|K_1}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $d(f(x), f_n(x)) < \varepsilon/2$, para todo $x \in K_1$ e $n \geq n_0$, donde segue que $f_n \in B_{K_1}(f,\varepsilon) \subseteq \mathcal{G}$, para todo $n \geq n_0$, e assim, (f_n) converge para f em $(\mathfrak{F}(X,Y),\sigma_c)$. □

Observação 8.4.5. *Considerando* X *um espaço topológico e* (Y,d) *um espaço métrico temos em* $\mathcal{B}(X,Y)$ *e, mais geralmente, em* $\mathfrak{F}(X,Y)$ *(vide Observação 8.3.4), bem definidas as três topologias:*

σ_s *da convergência simples ou pontual,*

σ_u *da convergência uniforme e*

σ_c *da convergência uniforme nas partes compactas.*

O resultado seguinte nos mostra como estas topologias estão relacionadas.

Proposição 8.4.6. *Sejam* X *um espaço topológico e* (Y,d) *um espaço métrico. Em* $\mathfrak{F}(X,Y)$ *considere as três topologias* σ_s, σ_c *e* σ_u. *Então*

$$\sigma_s \subseteq \sigma_c \subseteq \sigma_u.$$

Demonstração. • $\sigma_s \subseteq \sigma_c$: Seja $\mathcal{U} = V(x_1,G_1)\cap\cdots\cap V(x_r,G_r) = p_{x_1}^{-1}(G_1)\cap\ldots\cap p_{x_r}^{-1}(G_r)$ um aberto básico de $\mathfrak{F}(X,Y)$ com a topologia σ_s. Mostremos que $\mathcal{U}$ é um elemento de σ_c, para tanto basta mostrar que dado $f\in\mathcal{U}$, existe $B_K(f,\varepsilon)$ (elemento básico de σ_c) tal que $f\in B_K(f,\varepsilon)\subseteq\mathcal{U}$. Mas se $f\in\mathcal{U}$, então $f(x_i)\in G_i$, $\forall i=1,\ldots,r$, e como G_i é aberto de (Y,d), existe $\varepsilon_i>0$ tal que $B_d(f(x_i),\varepsilon_i)\subseteq G_i$. Tome o compacto $K=\{x_1,\ldots,x_r\}$ e $\varepsilon = min\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r\}$. Então $f\in B_K(f,\varepsilon) \subseteq \mathcal{U}$. Para ver essa última inclusão, note que

$h\in B_K(f,\varepsilon) = \{g\in\mathfrak{F}(X,Y);\ sup\{d(f(x),g(x)),x\in K\} < \varepsilon\} \Rightarrow d(f(x_i),h(x_i))<\varepsilon, \forall i=1,\ldots,r$
$\Rightarrow p_{x_i}(h)=h(x_i)\in B_d(f(x_i),\varepsilon)\subseteq G_i,\ \forall i \Rightarrow h\in p_{x_i}^{-1}(G_i),\forall i \Rightarrow h\in p_{x_1}^{-1}(G_1)\cap\ldots\cap p_{x_r}^{-1}(G_r)=\mathcal{U}.$

• $\sigma_c\subseteq\sigma_u$: Dado $\mathcal{G}=B_K(g,\varepsilon)\in\sigma_c$ um aberto básico em $\mathfrak{F}(X,Y)$ e $f\in\mathcal{G}$, queremos mostrar que existe uma bola aberta $B_{\widetilde{\rho}}(f,\lambda)\in\sigma_u$ tal que $f\in B_{\widetilde{\rho}}(f,\lambda)\subseteq\mathcal{G}$. Sabemos que dado $f\in\mathcal{G}=B_K(g,\varepsilon)$, existe $B_K(f,\delta)$ tal que $f\in B_K(f,\delta)\subseteq B_K(g,\varepsilon)$. Tome $\lambda>0$, $\lambda<min\{\delta/2,1\}$. Mostremos que $B_{\widetilde{\rho}}(f,\lambda)\subseteq B_K(f,\delta)$. De fato,

$$h\in B_{\widetilde{\rho}}(f,\lambda) \Rightarrow \widetilde{\rho}(h,f) = sup\{min\{d(h(x),f(x)),1\},\ x\in X\}<\lambda.$$

Como $\lambda<1$, devemos ter $d(h(x),f(x)) = min\{d(h(x),f(x)),1\}$ e assim $d(h(x),f(x)) < \lambda$, $\forall x\in X$. Daí $sup\,\{d(h(x),f(x));\ x\in K\} \leq \lambda < \delta$, o que implica que $h\in B_K(f,\delta)$, de modo que $\mathcal{G}\in\sigma_u=\sigma_{\widetilde{\rho}}$ e $\sigma_c\subseteq\sigma_u$. □

Observação 8.4.7. *Quando consideramos o espaço* $\mathcal{B}(X,Y)$ *e as três topologias anteriormente referidas, podemos provar a primeira inclusão trabalhando com a topologia do subespaço. Em* $\mathcal{B}(X,Y)$, σ_c *é a topologia que tem como base* $\mathcal{B}=\{B_K(f,\varepsilon)\cap\mathcal{B}(X,Y);\ K$ *compacto em* X *e* $\varepsilon>0\}$. *Para a segunda inclusão, em* σ_u *podemos trabalhar com a métrica* $\rho(f,g) = sup\{d(f(x),g(x));\ x\in X\}$ *(uma vez que em* $\mathcal{B}(X,Y)$, $\widetilde{\rho}=\overline{\rho}$, *que é equivalente a* ρ, *como citado na Observação 8.3.4 - ii). Agora, dado* $f\in\mathcal{G} = B_K(g,\varepsilon)\cap\mathcal{B}(X,Y)$ *um aberto básico de* $\mathcal{B}(X,Y)$, *existe* $\delta>0$, *tal que* $B_K(f,\delta)\cap\mathcal{B}(X,Y) \subseteq B_K(g,\varepsilon)\cap\mathcal{B}(X,Y)$. *É fácil ver que a bola aberta* $B_\rho(f,\delta) \subseteq B_K(f,\delta)\cap\mathcal{B}(X,Y)$. *Assim,* $f\in B_\rho(f,\delta)\subseteq\mathcal{G}$, *e portanto* $\sigma_c\subseteq\sigma_u$.

8.4.1 Exercício

1) Mostre que, em $\mathfrak{F}(X,Y)$, com X um espaço topológico e (Y,d) um espaço métrico, tem-se $\sigma_c=\sigma_u$ se X é compacto. (*Sugestão*: falta mostrar que $\sigma_u\subseteq\sigma_c$. Dados $\mathcal{G}\in\sigma_u$ e $f\in B_{\widetilde{\rho}}(f,\varepsilon)\subseteq\mathcal{G}$ tome $K=X$ e mostre que $B_K(f,\varepsilon_1)\subseteq B_{\widetilde{\rho}}(f,\varepsilon)$, para $\varepsilon_1=min\{\varepsilon,1\}$.)

2) Sejam X um espaço topológico e Y um espaço métrico. Se X é discreto, mostre que $\sigma_c=\sigma_s$ em $\mathfrak{F}(X,Y)$. (*Sugestão*: falta ver que $\sigma_c\subseteq\sigma_s$. Dado $B_K(g,\varepsilon)\in\sigma_c$ um aberto

básico, com K compacto em X, como X é discreto K é finito, $K = \{x_1, ..., x_n\}$. Tome $\mathcal{U} = p_{x_1}^{-1}(B_d(g(x_1), \varepsilon)) \cap ... \cap p_{x_n}^{-1}(B_d(g(x_n), \varepsilon)) \in \sigma_s$. É fácil ver que $B_K(g, \varepsilon) = \mathcal{U} \in \sigma_s$.)

3) Mostre que a sequência (f_n) em $\mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (dada no Exercício 8.3.1 - 1), definida por $f_n(x) = 1 - \frac{1}{n}|x|$, se $|x| \leq n$ e $f_n(x) = 0$, se $|x| \geq n$, converge uniformemente nas partes compactas para a função constante $g(x) \equiv 1$.

4) Sejam X um espaço topológico e Y um espaço métrico. Mostre que o conjunto $\mathfrak{B} = \{B_K(f, \varepsilon) : f \in \mathfrak{F}(X, Y),\ K \subseteq X,\ K$ compacto e $\varepsilon > 0\}$ forma uma base para uma topologia em $\mathfrak{F}(X, Y)$.

8.5 Topologia Compacto-Aberta

Sejam X e Y conjuntos não vazios e $\mathfrak{F}(X, Y)$ o conjunto de todas as aplicações de X em Y. Dados $A \subseteq X, B \subseteq Y$ representaremos por $\boldsymbol{S}(A, B)$ o subconjunto de $\mathfrak{F}(X, Y)$ formado pelas aplicações $f : X \to Y$ que levam A em B. Assim,

$$\boldsymbol{S}(A, B) = \{f \in \mathfrak{F}(X, Y) : f(A) \subseteq B\}.$$

Quando (X, τ) e (Y, ξ) são espaços topológicos podemos considerar os compactos de X e os abertos de Y para dar uma nova topologia para $\mathfrak{F}(X, Y)$.

Definição 8.5.1. *Sejam (X, τ) e (Y, ξ) espaços topológicos e $\mathcal{K}$ a família formada por todos os subconjuntos compactos de X. Então*

$$\mathcal{S} = \{\boldsymbol{S}(K, U) : K \in \mathcal{K} \text{ e } U \in \xi\}$$

é uma sub-base para uma topologia em $\mathfrak{F}(X, Y)$, chamada topologia ***compacto-aberta****. Vamos denotar tal topologia por σ_{ca}.*

Note que as duas topologias em $\mathfrak{F}(X, Y)$, da convergência simples ou pontual e a compacto-aberta (σ_s e σ_{ca}) foram definidas sem a exigência de que Y seja espaço métrico. O resultado seguinte relaciona essas topologias.

Proposição 8.5.2. *Sejam (X, τ) e (Y, ξ) espaços topológicos.*

(i) *Em $\mathfrak{F}(X, Y)$ a topologia da convergência simples é menos fina que a topologia compacto-aberta (isto é, $\sigma_s \subseteq \sigma_{ca}$).*

(ii) *As projeções (ou funções de avaliação) $p_x : \mathfrak{F}(X, Y) \to Y$; $p_x(f) = f(x)$, são contínuas em relação à topologia compacto-aberta.*

Demonstração. (i) Basta mostrar que todo aberto sub-básico de $\mathfrak{F}(X, Y)$ com a topologia da convergência simples σ_s $(= \sigma_{prod})$ é um aberto de $\mathfrak{F}(X, Y)$ relativamente a topologia compacto aberta. Um aberto sub-básico de $\mathfrak{F}(X, Y)$ com a topologia σ_s, é do tipo $V(x, U) = p_x^{-1}(U)$, com

$x \in X$ e U um aberto de Y. Mas $p_x^{-1}(U) = \{f \in \mathfrak{F}(X,Y): f(x) \in U\} = \boldsymbol{S}(\{x\},U) \in \sigma_{ca}$, pois $K = \{x\}$ é um subconjunto compacto de X (e U um aberto de Y).

(ii) Segue do fato que as funções $p_x : \mathfrak{F}(X,Y) \to Y, x \in X$ são aplicações contínuas quando tomamos em $\mathfrak{F}(X,Y)$ a topologia σ_s $(= \sigma_{prod})$ e da parte (i), pois $U \in \xi \Rightarrow p_x^{-1}(U) \in \sigma_s \subseteq \sigma_{ca}$. $\square$

Observação 8.5.3. *Nós definimos a topologia compacto-aberta em* $\mathfrak{F}(X,Y)$ *(estando de acordo, por exemplo, com Lipschutz [17]), mas alguns autores, como Munkres [20], consideram/definem a topologia compacto-aberta apenas em* $\mathcal{C}(X,Y)$, *o espaço das aplicações continuas. De fato é em* $\mathcal{C}(X,Y)$, *com* (Y,d) *espaço métrico, que a topologia compacto aberta é mais interessante, pois ela coincide com a topologia da convergência compacta* $(\sigma_c = \sigma_{ca})$, *como mostrado no teorema seguinte. Segue desse fato, que em* $\mathcal{C}(X,Y)$, *com* Y *um espaço métrico, a topologia da convergência compacta* σ_c *(que tem como elementos básicos* $B_K^{\mathcal{C}}(f,\varepsilon) := B_K(f,\varepsilon) \cap \mathcal{C}(X,Y) = \{g \in \mathcal{C}(X,Y) : sup\{d(f(x),g(x)),\ x \in K\} < \varepsilon\}$, *com* K *compacto e* $\varepsilon > 0$) *pode ser caracterizada sem que a métrica de* Y *seja dada diretamente (pois* σ_{ca} *foi definida usando apenas os abertos de* Y*).*

Teorema 8.5.4. *Sejam* X *um espaço topológico e* (Y,d) *um espaço métrico. Então em* $\mathcal{C}(X,Y)$ *as topologias compacto aberta e da convergência compacta coincidem, i.é,* $\sigma_c = \sigma_{ca}$.

Demonstração. (1) $\sigma_{ca} \subseteq \sigma_c$. Inicialmente vejamos uma afirmação. Dados $A \subseteq Y$ e $\varepsilon > 0$, considere a ε-*vizinhança* de A, $\boldsymbol{U}(A,\varepsilon) := \bigcup_{a \in A} B_d(a,\varepsilon)$, que é um aberto de Y que contém A.

Afirmacão: Se A é compacto e V é um aberto de Y contendo A então existe $\varepsilon > 0$, tal que $\boldsymbol{U}(A,\varepsilon) \subseteq V$. Com efeito, para cada $a \in A \subseteq V$ tome $\delta(a) > 0$ tal que $B_d(a,\delta(a)) \subseteq V$, que existe pois V é aberto. Como A é compacto, existem $a_1,...,a_n$ em A, tais que $A \subseteq [B_d(a_1,\delta(a_1)/2) \cup .... \cup B_d(a_n,\delta(a_n)/2)]$. Tome $\varepsilon = min\{\delta(a_i)/2,\ i = 1,...,n\}$. Para cada $a \in A$, $a \in B_d(a_j,\delta(a_j)/2)$, para algum j, e é fácil ver que $B_d(a,\varepsilon) \subseteq B_d(a_j,\delta(a_j)) \subseteq V$. Logo $\boldsymbol{U}(A,\varepsilon) = \bigcup_{a \in A} B_d(a,\varepsilon) \subseteq V$.

Mostremos então que $\sigma_{ca} \subseteq \sigma_c$. Sejam K um compacto em X, U um aberto em Y e $\boldsymbol{S}^{\mathcal{C}}(K,U) := \boldsymbol{S}(K,U) \cap \mathcal{C}(X,Y) \in \sigma_{ca}$ um aberto sub-básico de $\mathcal{C}(X,Y)$. Dado $f \in \boldsymbol{S}^{\mathcal{C}}(K,U)$, como K é compacto e f é contínua, $f(K) \subseteq U$ é compacto em Y. Pela afirmação anterior, existe uma ε-vizinhança $\boldsymbol{U}(f(K),\varepsilon) \subseteq U$ de $f(K)$. Considere o aberto básico $B_K^{\mathcal{C}}(f,\varepsilon) := B_K(f,\varepsilon) \cap \mathcal{C}(X,Y)$ de σ_c em $\mathcal{C}(X,Y)$. Verifiquemos que

$$B_K^{\mathcal{C}}(f,\varepsilon) \subseteq \boldsymbol{S}^{\mathcal{C}}(K,U).$$

De fato, $g \in B_K^{\mathcal{C}}(f,\varepsilon) \Rightarrow g \in \mathcal{C}(X,Y)$ e $\sup\{d(f(x),g(x)), x \in K\} < \varepsilon \Rightarrow d(f(x),g(x)) < \varepsilon, \forall x \in K$ $\Rightarrow g(x) \in B_d(f(x),\varepsilon) \subseteq \boldsymbol{U}(f(K),\varepsilon) \subseteq U$, $\forall x \in K \Rightarrow g(K) \subseteq U$, de modo que $g \in \boldsymbol{S}^{\mathcal{C}}(K,U)$. Assim, $f \in B_K^{\mathcal{C}}(f,\varepsilon) \subseteq \boldsymbol{S}^{\mathcal{C}}(K,U)$. Como $B_K^{\mathcal{C}}(f,\varepsilon)$ é um aberto básico em σ_c, segue que $\boldsymbol{S}^{\mathcal{C}}(K,U) \in \sigma_c$ e portanto, $\sigma_{ca} \subseteq \sigma_c$.

(2) $\sigma_c \subseteq \sigma_{ca}$. Seja $\mathcal{G} \in \sigma_c$, um aberto em $\mathcal{C}(X,Y)$ com a topologia da convergência compacta. Dado $f \in \mathcal{G}$, pela definição de σ_c (e propriedades), existe um aberto básico $B_K^{\mathcal{C}}(f,\varepsilon) := [B_K(f,\varepsilon) \cap \mathcal{C}(X,Y)]$ tal que $B_K^{\mathcal{C}}(f,\varepsilon) \subseteq \mathcal{G}$, com K compacto de X e $\varepsilon > 0$.

Afirmação: Para todo $x \in X$, existem uma vizinhança aberta de x, $V_x \subseteq X$ e uma vizinhança U_x de $f(x)$ em Y, tais que $f(\overline{V_x}) \subseteq U_x$, e o diâmetro $d(U_x) \leq 2\varepsilon/3 < \varepsilon$. De fato, como f é contínua em x, dado $\varepsilon > 0$, existe um aberto V_x contendo x tal que $f(V_x) \subseteq B_d(f(x), \varepsilon/4)$. Ainda, da continuidade de f, tem-se $f(\overline{V_x}) \subseteq \overline{f(V_x\ )} \subseteq \overline{B_d(f(x),\varepsilon/4)} \subseteq B_d(f(x),\varepsilon/3)$. Considere $U_x := B_d(f(x),\varepsilon/3)$. Então $d(U_x) \leq 2\varepsilon/3 < \varepsilon$ e $f(\overline{V_x}) \subseteq U_x$, o que justifica a afirmação.

Notemos agora que para o compacto K (com $B_K^C(f,\varepsilon) \subseteq \mathcal{G}$), tem-se $K \subseteq \bigcup_{x\in K} V_x$, onde V_x é como na afirmação anterior. Como K é compacto em X, existem $x_1, x_2, ..., x_n \in K$ tais que $K \subseteq V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup ... \cup V_{x_n}$. Para cada i, considere $K_{x_i} := \overline{V_{x_i}} \cap K \subseteq K$. Temos que K_{x_i} é fechado em K, daí é compacto. Tome

$$\mathcal{W} := \ \boldsymbol{S}^C(K_{x_1}, U_{x_1}) \cap \boldsymbol{S}^C(K_{x_2}, U_{x_2}) \cap \ ... \ \cap \boldsymbol{S}^C(K_{x_n}, U_{x_n}),$$

aberto básico de σ_{ca} em $\mathcal{C}(X,Y)$, então $f \in \mathcal{W} \subseteq B_K^C(f,\varepsilon) \subseteq \mathcal{G}$. De fato:

i) $f \in \mathcal{W}$ visto que $f(K_{x_i}) \subseteq f(\overline{V_{x_i}}) \subseteq U_{x_i}$, para todo $i = 1, \cdots, n$ e f é contínua, ou seja $f \in \mathcal{S}^C(K_{x_i}, U_{x_i})$, para todo i.

ii) $\mathcal{W} \subseteq B_K^C(f,\varepsilon)$. Com efeito, seja $g \in \mathcal{W} = \bigcap_{i=1,...n} \boldsymbol{S}^C(K_{x_i}, U_{x_i})$. Temos que $g(x) \in U_{x_i}$, para todo $x \in K_{x_i}$, $i = 1, 2..., n$. Agora, como $K \subseteq V_{x_1} \cup ... \cup V_{x_n}$, segue que $K = (\overline{V_{x_1}} \cap K) \cup ... \cup (\overline{V_{x_n}} \cap K) = K_{x_1} \cup \ ... \ \cup K_{x_n}$. Daí, para todo $x \in K$, $x \in K_{x_j}$ para algum j, e $f(x) \in f(\overline{V_{x_j}}) \subseteq U_{x_j}$. Como $g \in \mathcal{W}$, se $x \in K_{x_j}$, $g(x) \in U_{x_j}$, e assim $d(f(x), g(x)) \leq d(U_{x_j}) \leq 2\varepsilon/3$, para todo $x \in K_{x_j}$. Logo $sup\{d(f(x), g(x)), x \in K\} \leq 2\varepsilon/3 < \varepsilon$ e então $g \in B_K^C(f,\varepsilon)$. Portanto, $\mathcal{W} \subseteq B_K^C(f,\varepsilon) \subseteq \mathcal{G}$. Assim, para todo $\mathcal{G} \in \sigma_c$ e $f \in \mathcal{G}$, existe $\mathcal{W} \in \sigma_{ca}$, tal que $f \in \mathcal{W} \subseteq \mathcal{G}$, de modo que $\mathcal{G} \in \sigma_{ca}$.

De (1) e (2) segue que $\sigma_c = \sigma_{ca}$ em $\mathcal{C}(X,Y)$. □

Proposição 8.5.5. *Sejam X um espaço topológico, (Y,d) um espaço métrico e $\mathcal{C}(X,Y)$ o conjunto das aplicações contínuas de X em Y. Então uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ em $\mathcal{C}(X,Y)$ converge para $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ na topologia compacto-aberta se, e somente se, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformemente nas partes compactas para f.*

Demonstração. Pelo teorema anterior $\sigma_c = \sigma_{ca}$ em $\mathcal{C}(X,Y) \subseteq \mathfrak{F}(X,Y)$. Daí o resultado segue da Proposição 8.4.4. □

Definição 8.5.6. *Em vista dos resultados anteriores a topologia compacto-aberta é também referida, às vezes, como **topologia da convergência compacta**.*

8.6 Exercícios

1) Considere $\mathfrak{F}(X,Y)$ com a topologia da convergência compacta.

a) Mostre que $\mathfrak{F}(X,Y)$ é regular. É normal? Justifique. (*Sugestão*: para a regularidade, observe que para $f \in B_K(f,\varepsilon)$, existe $V = B_K(f,\varepsilon/3)$ tal que $f \in V \subseteq \overline{V} \subseteq B_K(f,\varepsilon)$. Para o caso normal note, por exemplo, que $\mathbb{R}^J = \mathfrak{F}(J,\mathbb{R})$ (com a topologia da convergência simples τ_s) não é normal se J não é enumerável (Munkres [20], Cap. 4, §32, Exemplo 1, p. 203). Agora, se consideramos o espaço topológico discreto $(J,\mathcal{P}(J))$ temos (pelo Exercício 8.4.1 - 2) que $\sigma_c = \sigma_s$, de modo que $\mathfrak{F}(J,\mathbb{R})$ com σ_c não será normal.)

b) Mostre que se X é a reunião enumerável de abertos com fecho compacto, então $\mathfrak{F}(X,Y)$ satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade.

2) Seja $W \subseteq X$. Prove que a restrição

$$r : \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{C}(W,Y);\ f \mapsto r(f) = f_{|W},$$

é contínua se ambos os espaços têm a topologia da convergência pontual ou a topologia compacto-aberta. (Munkres (*a first course*) [19], Cap. 7, §7 − 6, Exerc. 1, p. 289.)

3) Prove que, com a topologia compacto-aberta, $\mathcal{C}(X,Y)$ é um espaço de Hausdorff se Y é de Hausdorff. (*Sugestão*: $f \neq g$ implica $f(x) \neq g(x)$ para algum x em X. Se Y de Hausdorff esses pontos possuem vizinhanças disjuntas U, V, tome $\mathbf{S}(\{x\},U)$ e $\mathbf{S}(\{x\},V)$.)

4) Prove que, com a topologia compacto-aberta, $\mathcal{C}(X,Y)$ é um espaço regular se Y é regular. (*Sugestão*: use a Proposição 6.3.9. Vamos indicar, por simplicidade, $\mathbf{S}^{\mathcal{C}}(K,U) = \mathbf{S}(K,V) \cap \mathcal{C}(X,Y)$ apenas por $\mathbf{S}(K,U)$. Note que se $f \in \mathbf{S}(K,U)$, então $f(K) \subseteq U$, com U um aberto de Y e $f(K)$ compacto, pois f é continua. Da regularidade de Y, para cada $y \in f(K) \subseteq U$ existe V_y com $y \in V_y \subseteq \overline{V_y} \subseteq U$. Da compacidade de $f(K)$, $f(K) \subseteq V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$. Daí, para $V = V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$, tem-se $\overline{V} \subseteq U$ e $\mathbf{S}(K,\overline{V}) \subseteq \mathbf{S}(K,U)$. Daí, $f \in \mathbf{S}(K,V) \subseteq \overline{\mathbf{S}(K,V)} \subseteq \mathbf{S}(K,\overline{V}) \subseteq \mathbf{S}(K,U)$. Para ver a segunda inclusão, note que se $h \notin \mathbf{S}(K,\overline{V})$, $h(a) \in Y - \overline{V}$ para algum $a \in K$, assim $h \in S(\{a\},Y-\overline{V})$ e $\mathbf{S}(\{a\},Y-\overline{V}) \cap \mathbf{S}(K,V) = \emptyset$, de modo que $h \notin \overline{\mathbf{S}(K,V)}$. Agora, se $f \in \mathcal{W} = \mathbf{S}(K_1,U_1) \cap \cdots \cap \mathbf{S}(K_r,U_r)$ (aberto básico), então para cada $i = 1, \cdots r$, existe um aberto V_i (como antes) e, considerando $\mathcal{V} = \mathbf{S}(K_1,V_1) \cap \cdots \cap \mathbf{S}(K_r,V_r)$, tem-se que $\mathcal{V} \in \sigma_{ca}$ e $f \in \mathcal{V} \subseteq \overline{\mathcal{V}} \subseteq \mathcal{W}$.)

5) Supondo que X seja um espaço topológico compacto, Haudorff, completamente regular e que, em consequência $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ separa pontos (vide Exercício 6.4.1 - 4), prove que a topologia sobre X gerada/induzida pela família $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$, ou seja que tem como sub-base o conjunto $\bigcup_{f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R})} \{f^{-1}(G),\ G \text{ aberto de } \mathbb{R}\}$, coincide com a topologia de X. (Dugundji [5], Cap. VII, Probl. Sec.7, Exerc. 4, p. 159.)

6) Um espaço topológico X é *compactamente gerado* (vide Exercício 4.6 - 9) se satisfaz a seguinte condição: G é aberto em X se, e somente se, $G \cap K$ é aberto em K, para todo compacto K em X. Mostre que:

a) Se X é compactamente gerado, $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, $f|_K : K \to Y$ é contínua, para todo compacto K em X. (*Sugestão*: dado V aberto de Y, $f^{-1}(V) \cap K = (f|_K)^{-1}(V)$).

b) Se X é um espaço topológico compactamente gerado e Y é um espaço métrico então $\mathcal{C}(X,Y)$ é fechado em $\mathfrak{F}(X,Y)$ com a topologia da convergência compacta σ_c. (*Sugestão*: lembrando que $\overline{\mathcal{C}(X,Y)} = \mathcal{C}(X,Y) \cup \mathcal{C}(X,Y)'$, mostre que $f \in \mathcal{C}(X,Y)' \Rightarrow f \in \mathcal{C}(X,Y)$. Para tanto, para cada K compacto, considere uma sequência $f_n \in (B_K(f,1/n) - \{f\}) \cap \mathcal{C}(X,Y)$ e use que $(f_n|_K)$ converge uniformemente para $f|_K$ de modo que $f|_K$ é contínua para todo compacto K e assim f é contínua pelo item anterior. Logo $\overline{\mathcal{C}(X,Y)} = \mathcal{C}(X,Y)$ em $\mathfrak{F}(X,Y)$, σ_c.) (Munkres [20], Cap. 7, §46, Teor. 46.5, p. 284.)

7) Sejam X um espaço topológico e (Y,d) um espaço métrico. Em $\mathcal{C}(X,Y)$ defina uma topologia como segue: Dados $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ e uma função contínua positiva $\delta : X \to \mathbb{R}_+$, seja $B(f,\delta) = \{g \in \mathcal{C}(X,Y);\ d(f(x),g(x)) < \delta(x),\ \forall x \in X\}$. Mostre que:

a) O conjunto $\{B(f,\delta) :\ f \in \mathcal{C}(X,Y)$ e δ é uma função contínua positiva$\}$ forma uma base para uma topologia sobre $\mathcal{C}(X,Y)$ (chamada ***topologia fina***), que denotaremos por σ_{fina}.

b) $\sigma_u \subseteq \sigma_{fina}$.

c) Se X é compacto, então $\sigma_u = \sigma_{fina}$.

(*Sugestão*: para ver que é base note que $h \in B(f,\delta) \Rightarrow B(h,\delta_1) \subseteq B(f,\delta)$, para $\delta_1(x) = \delta(x) - d(h(x),f(x))$. Agora, $h \in B(f,\delta) \cap B(g,\gamma) \Rightarrow B(h,\eta) \subseteq B(f,\delta) \cap B(g,\gamma)$, para $\eta(x) = min\{\delta_1(x),\gamma_1(x)\}$ (com $\delta_1(x)$ e $\gamma_1(x)$ como antes). Para $\sigma_u \subseteq \sigma_{fina}$, note que dada $B_{\widetilde{\rho}}(f,\varepsilon)$, considerando a função constante $\delta(x) = r$, com $0 < r < min\{1,\varepsilon\}$, tem-se $B(f,\delta) \subseteq B_{\widetilde{\rho}}(f,\varepsilon)$. Finalmente, para o caso X compacto, use que dado $B(f,\delta)$, tem que $B_{\widetilde{\rho}}(f,\varepsilon) \subseteq B(f,\delta)$, para $\varepsilon = min\{1,\ min\{\delta(x), x \in X\}\}$.)

Índice

Bibliografia

[1] Bourbaki, N., *Élements d'Histórie des Mathematiques*. Hermann - Paris, 1969.

[2] Courant, R.; Robbins, H., *What is Mathematics?* Oxford University Press, 1941.

[3] Delachet, A., *Geometria Contemporânea*. Difusão Européia do Livro - São Paulo, 1962.

[4] Domingues, H. H., *Espaços Métricos e Introdução a Topologia*. São Paulo: Ed. Atual, 1982.

[5] Dugundji, J., *Topology*. Allyn and Bacon, Inc. Boston, 1966.

[6] Frechet, M.; Fan, K., *Introduccion a la Topologia Combinatória*. EUDEBA - Buenos Aires.

[7] Griffths, H. B.; Hilton, P. J., *Matemática Clássica: uma interpretação contemporânea*. 3 volumes. Sao Paulo: Ed. Edgard Blücher Ltda. e EDUSP, 1975.

[8] Halmos, P. R., *Teoria Ingênua dos Conjuntos*. São Paulo: Ed. Polígono, 1970.

[9] Hönig, C. S., *Aplicações da Topologia à Análise*. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 1976.

[10] Izar, S. A.; Tadini, W. M., *Teoria dos Conjuntos*. Notas de Aula nº 2, Departamento de Matemática, IBILCE-UNESP - São José do Rio Preto, 1994.

[11] Jänish, K., *Topology*. UTM - Springer - Verlag, N. Y., 1984.

[12] Kelley, J., *General Topology*. Van Nostrand Reinhold Co. N. Y., 1966.

[13] Lima, E. L., *Análise Real*, V.1. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 1993.

[14] Lima, E. L., *Elementos de Topologia Geral*. Textos Universitários. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

[15] Lima, E. L., *Espaços Métricos*. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 1977.

[16] Lipschutz, S., *Teoria dos Conjuntos*. Coleção Schaum - McGraw Hill, 1971.

[17] Lipschutz, S., *Topologia Geral*. Coleção Schaum - McGraw Hill, 1973.

[18] McCarty, G., *Topology: an introduction with applications to Topological Groups*. N. Y.: Dover Publ., 1988.

[19] Munkres, J. R., *Topology: a first course*. Prentice Hall, Inc. N. J., 1975.

[20] Munkres, J. R., *Topology*. 2nd Ed. Prentice Hall, Inc. N. J., 2000.

[21] Nagata, J. *On a necessary and sufficient condition of metrizability*, J. Inst. Poly. Osaka City Univ. 1 (1950), 93-100.

[22] Simmons, G. F., *Introduction to Topology and Modern Analysis*. McGraw - Hill Book Company, Inc. N. Y. 1963.

[23] Sims, B.T., *Fundamentals of Topology*. Macmillian Publ. Co., Inc. N. Y., 1976.

[24] Smirnov, Y. *On metrization of topological spaces*, Uspekhi. Matem. Nauk 6 (1951), 100-111.

[25] Smirnov, Y. *A necessary and sufficient condition for metrizability of a topological space*, Doklady Akad. Nauk. SSSR. 77 (1951), 197-200.

[26] Spanier, E. H. *Teoria dos Conjuntos e Espaços Métricos*. Sociedade Paranaense de Matemática. Curitiba, 1967.

[27] Steen, L. A.; Seebach Jr, J. A. *Counterexamples in Topology*. 2nd ed. Springer - Verlag, Inc. N. Y., 1978.

[28] Urysohn, P. *Zum Metrisationsproblem*, Math. Ann.94 (1925), 309-315.